
DESDE EL “GAS UNIDIMENSIONAL DE UN SOLO ÁTO-MO” A LA LEY DE COMPRESIÓN ADIABÁTICA

Reinaldo Welte

Departamento de Física y Química
Universidad Nacional de Rosario
Rosario - Argentina

Resumen

En muchos textos de física, tanto de nivel medio como universitario, se pretende dar una explicación "microscópica" del aumento de la temperatura de un gas que se comprime adiabáticamente estudiando el incremento de la rapidez de una molécula cuando colisiona con un émbolo en movimiento. En los últimos años han aparecido un gran número de simulaciones que permiten ensayar y ver los resultados de numerosas experiencias físicas "virtuales". En este trabajo analizaremos los razonamientos implícitos de una animación Java applet que describe un "gas" de un sólo átomo que se mueve en una dimensión, y cómo pueden ser utilizados para encontrar la relación entre la temperatura y el volumen de un gas que se comprime adiabáticamente.

I. Introducción

La investigación educativa (D. Brown, 1992; Thagard, 1992) brinda muchos ejemplos que demuestran que la explicación basada en los mecanismos subyacentes que dan cuenta de las "causas" que producen ciertos fenómenos, no solamente es la que más satisface a los estudiantes sino que es, a veces, el mejor recurso para que el aprendizaje de los contenidos sea significativo. Este mecanismo de explicación ha sido denominado *causalidad batígena* por Halbwachs, (1971), y un ejemplo es la recurrencia al nivel microscópico para dar explicaciones a los fenómenos que tienen lugar en el nivel macroscópico (Johsua, Dupin, 1993). Es bien conocida la utilización que se hace de la teoría cinética para deducir la vinculación entre las variables termodinámicas (nivel macroscópico): presión, temperatura y energía interna del gas con la energía cinética media de las moléculas (nivel microscópico).

En los libros de física general (Tipler, 1995) las transformaciones adiabáticas son tratadas con cierto detalle porque forman parte del ciclo de Carnot que tiene una gran importancia teórica. Sin embargo, en estos textos, no se discuten los procesos microscópicos que tienen lugar en el sistema cuando se realiza esta

transformación, salvo una breve mención al incremento de la rapidez de la molécula después del choque con el pistón que comprime el gas.

En los últimos años, utilizando las facilidades computacionales y de simulación, se han elaborado una gran variedad de "software" con experiencias virtuales que no sólo muestran el incremento de la rapidez de una molécula que realiza múltiples colisiones con un émbolo en movimiento, sino que calculan la variación de la energía cinética del átomo en función de la variación del volumen donde se encuentra el átomo. En lo que sigue vamos a describir uno de estos Java applet.

II. Gas de un único átomo que se mueve en una dimensión

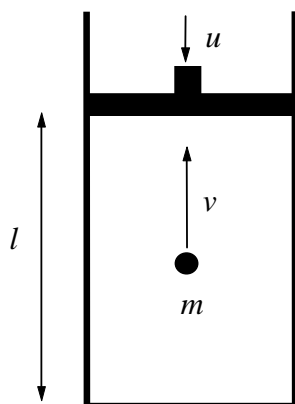


Fig. 1- Gas unidimensional de un solo átomo.

Un Java applet de la página Fowler Physics Applets (1999) muestra a un solo átomo que se mueve en el interior de un recipiente cilíndrico (ver figura 1). Se supone que el átomo se mueve solo paralelamente al eje del cilindro (el eje y). Si el pistón no se mueve la molécula rebotará por siempre, entre el pistón y el fondo del recipiente, con la misma rapidez. La molécula aumenta su rapidez si choca con el pistón cuando éste está comprimiendo el "gas". La *velocidad después de cada colisión = velocidad antes de la colisión + 2 veces la velocidad del pistón*.

A partir del estado inicial que se indica en la Tabla 1 se inicia la compresión del gas moviendo el pistón con una velocidad u de 0.5 m/s . Se observa que en cada choque la rapidez de la molécula aumenta en $2xu = 2 \times 0.5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$.

Tabla 1- Estado inicial

V_1 (volumen inicial del recipiente) =	1 unidad arbitraria
v_1 (rapidez inicial de la molécula) =	10 m/s
T_1 (temperatura inicial del "gas") =	0.13 K

La masa m del átomo es $10u_{ma}$ (unidad de masa atómica) y su temperatura se obtiene mediante la ecuación

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kT, \quad (1)$$

donde k es la constante de Boltzmann.

Tabla 2- Estado final

V_2 (volumen final del recipiente) =	$1/2$ de V_1
v_2 (rapidez final de la molécula) =	21 m/s (la molécula colisiona 11 veces con el pistón)
T_2 (temperatura final del "gas") =	0.13 K

La velocidad final (y, por lo tanto, la temperatura final) depende de la posición y del sentido de la velocidad del átomo en el instante inicial (el instante en que el pistón comienza a moverse). Por este motivo, el número de colisiones del átomo con el pistón, en el intervalo de tiempo en el que el volumen se reduce a la mitad, varía entre 10 y 12 . Si se corre varias veces la animación, entre los mismos estados inicial y final, se observa que la velocidad final varía en un entorno del orden de $\pm 5\%$, (y la temperatura en $\pm 10\%$) del valor que se muestra en la Tabla 2. Si se incrementa la velocidad del átomo en el instante inicial esta variación porcentual disminuye, porque el número de colisiones con el pistón aumenta.

Este Java-applet puede utilizarse en cualquier nivel de enseñanza: primario, secundario y aún en el universitario. En estos dos últimos niveles un ejercicio interesante es la deducción de una expresión matemática que permita calcular la "temperatura" del gas en función del volumen del recipiente. Obtener esta relación es el objetivo del párrafo siguiente.

III. Temperatura del gas en función del volumen

En la figura 1 se muestra el proceso de compresión del átomo en un instante cualquiera t . Si en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ la molécula colisiona n veces con el pistón, se tendrá:

$$|v_y(t + \Delta t)| = |v_y(t)| + 2nu \quad (2)$$

y, por lo tanto

$$v_y^2(t + \Delta t) = v_y^2(t) + 4nu|v_y(t)| + 4n^2u^2 \quad (3)$$

Si el pistón se mueve lentamente, esto es si

$$2nu \ll |v_y(t)| \quad (4)$$

la ecuación (3) se reduce a:

$$v_y^2(t + \Delta t) \approx v_y^2(t) + 4nu|v_y(t)| \quad (5)$$

Si el desplazamiento del émbolo, en el intervalo de tiempo Δt , es muy pequeño, el tiempo entre dos colisiones sucesivas de la molécula con el pistón es aproximadamente igual a $2l/|v_y|$ y, por lo tanto, Δt y n se relacionan a través de la expresión:

$$n = \frac{\Delta t}{2L/|v_y|} = \frac{|v_y|\Delta t}{2L} \quad (6)$$

En el intervalo de tiempo Δt el pistón se desplaza una distancia Δl que viene dada por:

$$\Delta l = u\Delta t = \frac{2nul}{|v_y|} \quad (7)$$

que es mucho menor que l si se verifica la ecuación (4).

Si combinamos esta ecuación con la (5) obtenemos:

$$v_y^2(t + \Delta t) = v_y^2(t) \left(1 + \frac{2\Delta l}{l} \right) = v_y^2(t) \left(1 + \frac{2\Delta V}{V} \right), \quad (8)$$

donde $\Delta V = S\Delta l$, es la variación de volumen del recipiente en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ y $V = Sl$ es el volumen del recipiente en el instante t .

Si relacionamos la energía cinética y la temperatura del átomo a través de la ecuación (1) obtenemos:

$$T(t + \Delta t) = T(t) \left(1 + \frac{2\Delta V}{V} \right) \quad (9)$$

O sea:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2\Delta V}{V},$$

donde $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$.

Si hacemos $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{T} = 2 \frac{dV}{V} \quad (10)$$

cuya solución es:

$$TV^2 = \text{constante}, \quad (11)$$

La temperatura del estado 2, que se calcula a través de la ecuación (11) es:

$$T_2 = T_1 \frac{V_1^2}{V_2^2} = 0,13 \frac{1}{(1/2)^2} = 4 \times 0,13 = 0,52K,$$

valor muy próximo al que se determina en la animación Java-applet.

IV. Comparación con las ecuaciones de la Termodinámica

Podemos mejorar conceptualmente nuestra deducción si suponemos que tenemos, no solamente un átomo, sino muchos átomos que se mueven a lo largo del eje y . Como los átomos tienen ahora diferentes velocidades es conveniente calcular el promedio de la ecuación (8) sobre todas las velocidades posibles. El efecto de este promedio es simplemente reemplazar a $v_y^2(t + \Delta t)$ y a $v_y^2(t)$ en la ecuación (8) por sus valores medios que designaremos $\langle v_y^2(t + \Delta t) \rangle$ y $\langle v_y^2(t) \rangle$.

Si definimos la temperatura de este gas mediante la expresión:

$$\frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad (12)$$

donde $\langle v_y^2 \rangle$ es la velocidad cuadrática media, obtenemos la misma ecuación (9), pero ahora con una identificación más correcta entre la temperatura y la velocidad cuadrática media de un gas de muchos átomos, y no con el cuadrado de la velocidad de un solo átomo. Nuestro gas, sin embargo, sigue siendo un gas unidimensional, aunque ahora de muchas moléculas y no de una.

La ecuación (11) nos recuerda a la ecuación

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (13)$$

que encontramos en los textos de Termodinámica. En esta ecuación γ es la razón de calores específicos. Si comparamos las ecuaciones (11) y (13) concluimos que el γ de nuestro gas unidimensional es igual a 3. ¿Es razonable este valor? La teoría cinética relaciona γ con el número de grados de libertad f de los átomos o

moléculas del gas a través de la expresión:

$$\gamma = \frac{f+2}{f}$$

Nuestro gas está formado por átomos que tienen solamente *un grado de libertad de traslación*, por lo tanto $f=1$ y $\gamma=3$. La deducción que hicimos coincide, por lo tanto, con el resultado previsto por la teoría cinética.

V. Generalización a un gas tridimensional

Suponemos ahora que la molécula que se muestra en la figura 1, tiene una velocidad $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{e}_x + v_y(t)\mathbf{e}_y + v_z(t)\mathbf{e}_z$ en el instante t . En cada choque con el émbolo, la molécula incrementa solamente la componente y de su velocidad en $+2u$, mientras que las componentes transversales v_x y v_z permanecen las mismas. Por lo tanto, si el pistón se mueve lentamente (esto es, si se satisface la ecuación (4)), se tiene para el valor medio de la componente y de la velocidad el mismo valor que en el caso anterior, esto es:

$$\langle v_y^2(t + \Delta t) \rangle = \langle v_y^2(t) \rangle \left(1 + \frac{2\Delta V}{V} \right),$$

mientras que los valores cuadráticos medios de las componentes de las velocidades en las direcciones transversales permanecen inalterados:

$$\langle v_x^2(t + \Delta t) \rangle = \langle v_x^2(t) \rangle \quad \text{y} \quad \langle v_z^2(t + \Delta t) \rangle = \langle v_z^2(t) \rangle$$

Observemos que después de cada colisión se incrementa solamente la energía cinética en la dirección del movimiento del émbolo. Si no existe un mecanismo de transferencia de energía en las otras direcciones, la energía cinética media y, por lo tanto, la temperatura del gas, no será isotrópica. Son las colisiones las que se encargan

de transferir la energía en las otras direcciones y, finalmente, después de transcurrido un cierto tiempo la distribución de velocidades será isotrópica y la energía cinética media a lo largo de las tres direcciones será la misma. Notemos, que además del tiempo en que se realiza la compresión, existe otro *tiempo característico* para describir el fenómeno de compresión adiabático: es el tiempo que se tarda en transferir la energía en las otras direcciones. Este tiempo se denomina *tiempo de relajación*. El estudio de la compresión dependerá de la relación existente entre estos dos tiempos. En los gases ordinarios el tiempo de relajación es generalmente mucho menor que el tiempo de compresión y la distribución de velocidades se mantiene prácticamente isotrópica durante la compresión. En gases poco densos la relación entre estos tiempos se puede invertir y la distribución de velocidades en el estado final, no será isotrópica.

En ausencia de colisiones, la energía que se le suministra al gas durante la compresión, produce un incremento, solamente, en la energía cinética media asociada al movimiento paralelo al eje y :

$$\frac{1}{2}m\langle v_y^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2(t) \rangle \frac{2\Delta V}{V}$$

mientras que

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_x^2(t) \rangle = 0$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_z^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_z^2(t) \rangle = 0$$

Pero si las colisiones durante la compresión son lo suficientemente frecuentes, la energía que se le suministra al gas se distribuye “casi” instantáneamente, por partes iguales, entre todos los grados de libertad de traslación, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_x^2(t) \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_x^2(t) \rangle \frac{2\Delta V}{3V}$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_y^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_y^2(t) \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_y^2(t) \rangle \frac{2\Delta V}{3V}$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_z^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v_z^2(t) \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_z^2(t) \rangle \frac{2\Delta V}{3V}$$

Si sumamos estas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2(t + \Delta t) \rangle - \frac{1}{2}m\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2(t) \rangle \frac{2\Delta V}{3V} \quad (14)$$

donde:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Como la distribución de velocidades permanece isotrópica durante la transformación, las temperaturas cinéticas asociadas al movimiento a lo largo de cada uno de los ejes es la misma. En términos de la temperatura cinética la ecuación (14) se escribe así:

$$T(t + \Delta t) - T(t) = \frac{2}{3}T(t) \frac{\Delta V}{V} \quad (15)$$

Integrando esta ecuación obtenemos:

$$TV^{-\frac{2}{3}} = cte \quad (16)$$

Si comparamos esta ecuación con la ley de transformación adiabática de la termodinámica, encontramos que ahora hay que tomar para γ , en la ecuación (13), el valor "normal" de 5/3 para un gas monoatómico tridimensional.

VI. Conclusión

El applet que sirvió como punto de partida de este trabajo es muy simple porque está diseñado para tratar solamente una faceta del fenómeno físico: *el incremento de velocidad de la molécula después de colisionar con el émbolo en movimiento*. En un curso de introducción a la física dictado en la facultad de ciencias e ingeniería se utilizó este applet antes de realizar el análisis teórico que se presenta en este trabajo. En particular este tratamiento nos permitió reflexionar sobre la definición de la temperatura termodinámica, ecuación (12) y sobre el hecho muy importante, y poco tratado en los textos, de que la energía que se le suministra a un gas no se reparte *instantáneamente* entre sus distintos grados de libertad. El tiempo que se tarda en realizar esta transferencia y alcanzar el estado de equilibrio es el *tiempo de relajación*. La transferencia de energía entre los diferentes grados de libertad de traslación en un gas se realiza a través de las colisiones entre las moléculas.

Hasta que no se haya alcanzado el equilibrio interno del gas no se puede definir su temperatura. *Sin embargo, en algunos casos, se pueden definir temperaturas cinéticas asociadas al movimiento a lo largo de cada uno de los ejes.* En un gas de temperatura y presión normal ($T \approx 300\text{ K}$ y presión atmosférica), la velocidad media de las moléculas es del orden de 400 m/s y el tiempo libre medio entre colisiones es aproximadamente 10^{-9} s . Aún cuando el tiempo de compresión sea muy corto (por ejemplo 10^{-3} s), el número de colisiones ($\sim 10^6$) que tienen lugar en este tiempo es lo suficientemente grande para asegurar que la distribución de velocidades se mantiene isotrópica durante la compresión.

Los átomos ionizados que se mueven alrededor de un campo magnético pueden quedar encerradas entre dos “espejos” magnéticos. Si los espejos magnéticos se acercan entre sí, como el pistón de nuestro ejemplo, la energía de la partícula cargada aumenta en cada reflexión sobre el espejo. Estos gases ionizados, que se producen en el laboratorio o se encuentran en forma natural en algunas regiones del espacio interestelar, tienen una densidad muy baja y el tiempo de relajación es, entonces, muy grande comparado con el tiempo de compresión y la variación de la temperatura asociada a la dirección del movimiento de los espejos magnéticos viene dada por la ecuación (13) con un valor de $\gamma = 3$ (Spitzer, 1969).

VII. Referencias Bibliográficas

- BROWN, D. E., Using examples and analogies to remediate misconceptions in Physics: Factors influencing conceptual change, Journal of Research in Science Teaching, 29, 1, 17-34, 1992.
- FOWLER, M., Fowler's Physics Applets, One-dimensional one-atom classical gas, Physics 581, Physics for High School Teachers, University of Virginia Physics, Agosto 1999.
- (http://www.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/Piston/jaraapplet.html).
- HALBWACHS, F., Causalité linéaire et causalité circulaire en physique et les théories de la causalité, París, PUF, 1971.
- JOSHUA, S., DUPIN, J.J., Introduction á la didactique des sciences et des mathématiques, París, PUF, 1993.
- SPITZER, L., Física de los gases totalmente ionizados, Editorial Alambra, 1969.
- THAGARD, P., Analogy, explanation and education, Journal of Research in Science Teaching, 29, 6, 537-544, 1992.
- TIPLER, P. A., Física, tercera edición, Tomo 1, Editorial Reverté, 1995.