ONDAS SUPERFICIALES DE GRAVEDAD EN UN FLUIDO IDEAL

Reinaldo Welti
Departamento de Física y Química – FCEIA – UNR
Avda. Pellegini 250 – (2000) Rosario

E-mail: welti@fceia.unr.edu.ar

Resumen. En este artículo se deducen las ecuaciones que describen el comportamiento de las ondas superficiales de gravedad en un fluido, partiendo de las ecuaciones de Euler para un fluido ideal.

Introducción. Las ecuaciones básicas para el estudio de las ondas de gravedad en un fluido ideal (no viscoso) son:

la *ecuación de Euler*:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\rho\,\boldsymbol{g} \tag{1}$$

y, la *ecuación de conservación de la masa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla.(\rho\,\boldsymbol{u})=0 \tag{2}$$

En estas ecuaciones ρ es la densidad de masa, p la presión, $\boldsymbol{g}$ la aceleración de la gravedad y $\boldsymbol{u}$ la velocidad de un elemento de fluido.

En (1) el segundo miembro es la fuerza por unidad de volumen causada por la presión y el campo gravitatorio y el primer miembro es la densidad de volumen por la aceleración del elemento de volumen. Esta aceleración está compuesta por dos términos: el primero es la aceleración local y el segundo la aceleración convectiva.

Si el fluido es incompresible, $\rho = cte.$, y la ecuación de conservación de la masa se reduce a

$$\nabla.\boldsymbol{u}=0 \tag{3}$$

Si la amplitud de la onda A es pequeña comparada con la longitud de onda, se puede despreciar el término convectivo $(\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u}$ comparado con $\partial\boldsymbol{u}/\partial$t. En efecto, en un tiempo del orden del período T las partículas del fluido recorren una distancia del orden de la amplitud A de la onda. La velocidad es entonces del orden de $u \approx A/T$. La escala temporal de variación de u es T y la escala espacial de su variación (en la dirección de propagación) es la longitud de onda λ. Luego, $|\partial\boldsymbol{u}/\partial t| \approx u/T$ y $|(\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u}| \approx u^2/\lambda$. El término convectivo será despreciable frente a $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ si se cumple

$$\left|\frac{(\boldsymbol{u}.\nabla)\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{u}/\partial t}\right| \approx \frac{u^2/\lambda}{u/T} \approx \frac{A}{\lambda} << 1 \tag{4}$$

En el caso de ondas de gravedad, en aguas poco profundas, además de la escala espacial λ en la dirección de propagación hay una escala espacial h perpendicular a la dirección de propagación. En este caso el término convectivo se puede despreciar si además de la condición (4) se cumple que

$$\frac{A}{h} << 1 \tag{5}$$

Después de despreciar el término convectivo, la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) \tag{6}$$

donde el eje z es vertical y positivo en la dirección hacia arriba.

Si tomamos el rotor de (6) obtenemos:

$$\frac{\partial(\nabla \times \boldsymbol{u})}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

y, por lo tanto, $\nabla\times\boldsymbol{u}$ = cte. Pero como en un movimiento oscilatorio el promedio temporal de $\boldsymbol{u}$ es cero, $\nabla\times\boldsymbol{u}$ = cte. implica que la constante debe ser cero, por lo tanto:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = 0 \tag{8}$$

Como el campo de velocidades $\boldsymbol{u}$ es irrotacional, puede escribirse bajo la forma del gradiente de una función escalar, que designaremos por Φ,

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi \tag{9}$$

Si introducimos esta ecuación en (3) obtenemos,

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{10}$$

que es la ecuación de Laplace para el potencial Φ. Se debe asociar a esta ecuación las ecuaciones de contorno sobre el fondo del recipiente y sobre la superficie libre del fluido.

Condiciones de contorno y relación de dispersión. Si introducimos (9) en (6) obtenemos:

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \tag{11}$$

Esta ecuación implica que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \tag{12}$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. La función $f(t)$ puede, sin pérdida de generalidad, igualarse a cero. En efecto, como la velocidad está determinada por las derivadas de Φ con respecto a las coordenadas, se puede sumar a Φ una función cualquiera del tiempo. Reemplazando Φ por $\Phi + \int f(t)dt$, se obtiene cero en el segundo miembro de la igualdad (12).

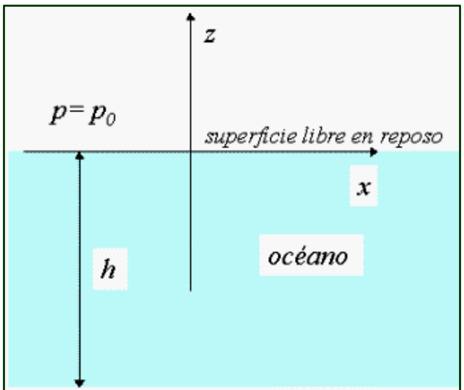

Figura 1. Superficie libre de un océano de profundidad h.

Vamos a indicar con $\zeta(x, y, t)$ la coordenada z de un punto de la superficie perturbada. En el equilibrio $\zeta = 0$, de modo que ζ representa el desplazamiento vertical de la superficie debido a las oscilaciones. Supongamos que sobre la superficie libre de un océano de profundidad h (ver figura 1) se ejerce una presión constante p_0 (la presión atmosférica). Entonces por la (12) se debe cumplir, en la superficie libre del fluido, la *condición de contorno*

$$p_0 = -\rho g\zeta - \rho \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} \tag{13}$$

Si reemplazamos el potencial Φ por $\Phi + (p_0/\rho)t$, no cambia el campo de velocidades y la ecuación (13) se escribe de la forma:

$$g\varsigma - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = 0 \qquad (14)$$

Si la amplitud de la onda es pequeña, también es pequeño el desplazamiento de la superficie del fluido ζ. Por consiguiente, podemos calcular la componente vertical de la velocidad del movimiento de los puntos superficiales despreciando los términos convectivos, esto es

$$u_z(x,y,\varsigma,t) \approx \frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad (15)$$

Por otro lado

$$u_z(x,y,\varsigma,t) = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} \qquad (16)$$

Esto es,

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \qquad (17)$$

Sustituyendo en esta última ecuación a la función ζ que se obtiene de (14), encontramos que:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=\varsigma} = 0$$

Como las oscilaciones son pequeñas, podemos evaluar la cantidad entre paréntesis en $z = 0$ en vez de $z = \zeta$, con lo que finalmente la condición de borde en la superficie libre es

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \qquad (18)$$

En el fondo del fluido la componente normal de la velocidad debe ser nula, es decir que

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad en \qquad z = -h \qquad (19)$$

El potencial de velocidad. El sistema de ecuaciones que determina el movimiento de la onda de gravitación son: la ecuación de Laplace (10) y las condiciones de borde (18) y (19).

Para simplificar, buscamos una onda sinusoidal de gravitación que se propaga a lo largo del eje x y que es uniforme a lo largo del eje y. En una onda de este tipo, ninguna magnitud depende de la coordenada y. Podemos proponer, entonces, como solución de nuestro problema a

$$\Phi = cos(\omega t - kx) f(z), \qquad (20)$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda, $T = 2\pi/\omega$ es el período del movimiento en el tiempo en un punto del espacio, k es el vector de onda, $\lambda = 2\pi/k$ es la longitud de onda, es decir el período de variación del movimiento a lo largo del eje x (en un instante dado). Sustituyendo en la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (21)$$

se obtiene que:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0 \qquad (22)$$

Esta ecuación tiene por soluciones e^{kz} y e^{-kz}, de modo que la solución general para el potencial de velocidades es

$$\Phi = cos(\omega t - kx)\left\{Ae^{kz} + Be^{-kz}\right\} \tag{23}$$

La condición de contorno (19) nos permite deducir la relación entre las constantes A y B de modo que la (23) se puede escribir de la forma:

$$\Phi = \Phi_0\, cos(\omega t - kx) cosh\, k(z+h) \tag{24}$$

donde $\Phi_0 = 2Ae^{-kh}$. Si reemplazamos (24) en la condición de contorno (18) se deduce la siguiente relación (denominada *relación de dispersión*) entre k y ω:

$$\omega^2 = gk\, tanh\, kh \tag{25}$$

Como $\omega = 2\pi/T$ y $k = 2\pi/\lambda$, obtenemos para la velocidad de fase V_F la expresión:

$$V_F = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} \tag{26}$$

Movimiento de la superficie libre del fluido. Si reemplazamos (24) en (17) podemos encontrar la ecuación para la superficie libre del fluido,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = k\Phi_0\, senh(kh)\, cos(\omega t - kx) \tag{27}$$

Integrando,

$$\zeta = \frac{k\Phi_0}{\omega} senh(kh)\, sen(\omega t - kx) \tag{28}$$

Si con A designamos la amplitud de la onda de superficie, se tiene que:

$$\Phi_0 = \frac{A\omega}{k\, senh(kh)} \tag{29}$$

Reemplazando (29) en (1.24) obtenemos finalmente la siguiente expresión para el potencial de velocidad;

$$\Phi = \frac{A\omega\, cosh\, k(z+h)}{k\, senh(kh)} cos(\omega t - kx) \tag{30}$$

En esta ecuación aparece explícitamente la amplitud A de la onda de superficie.

Las trayectorias de las partículas. El campo de velocidades se calcula fácilmente a partir del potencial (30),

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{A\omega\, cosh\, k(z+h)}{senh(kh)} sen(\omega t - kx) \\ u_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{A\omega\, senhk(z+h)}{senh(kh)} cos(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{31}$$

Las trayectorias $x(t)$ y $z(t)$ de las partículas de fluido, conociendo su posición x_0 y z_0 en $t = 0$, se obtiene integrando las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{A\omega\, cosh\, k(z+h)}{senh(kh)} sen(\omega t - kx) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{A\omega\, senhk(z+h)}{senh(kh)} cos(\omega t - kx) \end{aligned} \tag{32}$$

No es simple resolver rigurosamente estas ecuaciones diferenciales. Si la amplitud de los desplazamientos de la partícula alrededor de su posición de equilibrio es pequeña comparada con la longitud de onda, podemos reemplazar a x y z por x_0 y z_0 en los segundos miembros de las ecuaciones (32). En esta situación la integración es inmediata, obteniéndose:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{A \cosh k(z_0 + h)}{senh(kh)} cos(\omega t - kx_0) \\ z &= z_0 + \frac{A\, senh\, k(z_0 + h)}{senh(kh)} sen(\omega t - kx_0) \end{aligned} \qquad (33)$$

Si definimos

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{A}{senh(kh)} \begin{pmatrix} \cosh k(z_0 + h) \\ senhk(z_0 + h) \end{pmatrix} \qquad (34)$$

se obtiene

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (35)$$

La trayectoria a cualquier profundidad es una elipse. Tanto el eje horizontal (mayor) y vertical (menor) de la elipse disminuye monótonamente con la profundidad. El eje menor disminuye hasta cero en el lecho del océano ($z_0 = -h$), y la elipse se convierte en un segmento horizontal.

Cuando $\omega t - kx_0 = 0$, se tiene $x - x_0 = -a$ y $z - z_0 = 0$. Un cuarto de periodo más tarde, $\omega t - kx_0 = \pi/2$, $x - x_0 = 0$ y $z - z_0 = +b$. Por lo tanto, a medida que transcurre el tiempo la partícula recorre la órbita elíptica en el sentido de las agujas del reloj.

De la ecuación (34) se encuentra que el eje mayor de la elipse sobre la superficie del océano ($z_0 = 0$), para una onda de agua poco profunda, $kh << 1$, es del orden de ($A\lambda/2\pi h$). En alta mar, este eje es mucho menor que la longitud de onda, sin embargo en el litoral se hace comparable a la longitud de onda. Para un tsunami la longitud del eje mayor puede ser de varios kilómetros.

La velocidad de las partículas de agua sobre la superficie del mar ($z_0 = 0$), para una onda de aguas poco profundas es del orden de $A\omega/(kh) = (A/h)V_F$. Para un tsunami, en alta mar, esta velocidad es del orden de $10\ cm/s$ y en el litoral de $10\ m/s$.

La velocidad de las partículas de agua, como la gran longitud del eje horizontal de sus trayectorias en las proximidades del litoral explican porqué el tsunami lleva a la playa sedimentos del lecho marino, restos de naufragios y otros objetos sumergidos.

Energía y transporte de energía. La densidad de energía cinética instantánea e_c de un elemento de volumen, alrededor del punto x, z, es

$$\begin{aligned} e_c &= \frac{1}{2}\rho\left(u_x^2 + u_z^2\right) \\ &= \frac{\rho A^2 \omega^2}{2 senh^2(kh)} \left[\cosh^2 k(z + h) sen^2(\omega t - kx) + senh^2 k(z + h) cos^2(\omega t - kx)\right] \end{aligned}$$

y su promedio temporal $<e_c>$ es

$$< e_c > = \frac{\rho A^2 \omega^2}{4 senh^2(kh)} \left[\cosh^2 k(z + h) + senh^2 k(z + h)\right] \qquad (36)$$

La energía cinética promedio $<E_c>$ por unidad de longitud a lo largo del eje x y unidad de longitud a lo largo del eje y, (es decir por unidad de superficie) se obtiene integrando (36) desde $z = -h$ hasta $z = 0$.

$$< E_c > = \int_{-h}^{0} < e_c > dz = \frac{1}{4}\rho g A^2 \qquad (37)$$

Si tomamos como nivel cero para la energía potencial la superficie $z = 0$, la densidad de energía potencial instantánea e_p de un elemento de volumen que está a una altura z es

$$e_p = \rho g z$$

La energía potencial instantánea por unidad de área es

$$E_p = \rho g \int_0^{\zeta} z dz = \frac{1}{2}\rho g \zeta^2$$

El promedio en el tiempo de la energía potencial es, entonces

$$< E_p > = \frac{1}{4}\rho g A^2 \qquad (38)$$

La energía media total es

$$< E > = < E_c > + < E_p > = \frac{1}{4}\rho g A^2 + \frac{1}{4}\rho g A^2 = \frac{1}{2}\rho g A^2 \qquad (39)$$

Observemos que la energía *media* total se divide por igual entre la energía cinética y potencial.

Flujo de potencia en aguas poco profundas. Como en aguas poco profundas, las ondas son no dispersivas, esto es, la velocidad con la que se propaga la energía coincide con la velocidad de fase, el flujo de potencia medio $< I >$ (energía que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo) viene dado por

$$< I > = < E > V_F = \frac{1}{4}\rho g^{3/2} A^2 h^{1/2} \qquad (40)$$

Si la profundidad del océano disminuye lentamente cuando la onda se acerca al litoral prácticamente no se produce ninguna reflexión de la onda. Disminución lenta significa que la longitud de onda es pequeña comparada con la dimensión de la zona donde se produce la transición del alta mar al litoral. Si no hay disipación ni reflexión la intensidad media de la onda, $< I >$ se mantiene constante mientras se propaga hacia el litoral. Esto significa que

$$A^2 h^{1/2} = cte., \qquad (41)$$

Esta ecuación implica que la amplitud de la onda de aguas poco profundas aumenta su amplitud a medida que se acerca al litoral.

Bibliografía

Gratton, J., *Introducción a la mecánica de Fluidos*, Cap. 9: Ondas superficiales de gravedad, http://www.lfp.uba.ar/Julio_Gratton/fluidos/Fluidos.html, (2003).

Landau, L., Lifshitz, E., Course of Theoretical Physics, Vol.6: *Fluids Mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1960).

Mei, C., Li, G., *Wave propagation*, Ch.4: Waves in water, MIT OpenCourseWare, (2000).

Welti, R, *Introducción a la Física de las Ondas*, UNR Editora, (1999).