

# Efectos de la inserción de elementos de parámetros concentrados sobre los modos normales de oscilación de un medio finito continuo

(Influence of lumped parameters elements on the normal oscillation modes of finite continuous medium systems)

B.J. Gómez<sup>1,2</sup>, C.E. Repetto<sup>1,2</sup>, C.R. Stia<sup>1,2</sup> y R. Welti<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física y Química, Escuela de Formación Básica, Universidad Nacional Rosario, Rosario, Argentina

<sup>2</sup>Instituto de Física, Universidad Nacional Rosario, Rosario, Argentina

Recibido em 20/2/2008; Aceito em 20/3/2008; Publicado em 8/10/2008

En este trabajo se estudia la influencia de parámetros concentrados sobre los modos normales de oscilación de un medio continuo de dimensiones finitas. En particular, se estudian las vibraciones de una antena dipolo corta con una inductancia concentrada y los modos acústicos en un tubo con una cámara de expansión en su punto medio. Se encuentra que estos problemas presentan una gran similitud con los modos transversales de una cuerda homogénea, fija en sus dos extremos y cargada con una masa en su punto medio.

**palabras-clave:** modos normales, medios continuos, parámetros concentrados.

In this work, the influence of lumped parameters on the normal oscillation modes of mechanical systems are studied theoretically. In particular, we study the vibration modes of a dipole antenna with concentrated inductances and a tube with an expansion chamber inserted in its middle point. It is found that these problems have close similarities with the transverse modes of a homogeneous string fixed at both ends and loaded with one mass at its middle point.

**keywords:** normal modes, continuum media, lumped parameters.

## 1. Introducción

Uno de los temas más interesantes del que se ocuparon los físicos y matemáticos del siglo XVIII fue el que se conoce con el nombre de “problema de la cuerda vibrante” [1]. D’Alembert (1747) realizó la derivación de la ecuación de ondas en una dimensión y encontró la solución general de la misma. Bernoulli (1753), inspirándose en sus conocimientos de música, propuso una solución diferente que se expresaba como una combinación lineal de la armónica fundamental y sus sobretonos, pero no encontró un método para calcular los coeficientes. Esta solución fue criticada por Euler quien declaró manifiestamente absurda la posibilidad de representar las condiciones iniciales de una cuerda punteada (pizzicata), que tiene un punto anguloso, como una suma de funciones regulares (las funciones sinusoidales).

Lagrange [2] investigó las oscilaciones no armónicas de una cuerda con densidad de masa variable. Rayleigh [3] obtuvo las frecuencias y los modos normales de oscilación de la cuerda cargada con una masa puntual en un punto cualquiera de la misma. Helmholtz [4], en su búsqueda de la frecuencia en la cual los impulsos se fu-

sionan en un tono continuo, utilizó una cuerda cargada en su punto medio para separar la frecuencia del tono más bajo de los tonos de frecuencias más altas.

Más recientemente, Chen [5] encuentra las frecuencias propias de una cuerda concentrada usando la función delta de Dirac y los métodos de la transformada de Laplace. Parmley *et al.* [6] estudian, experimentalmente y mediante cálculos numéricos, las autofrecuencias y las autofunciones de una cadena de masas y resortes. Santos *et al.* [7] discuten el movimiento de un resorte con densidad de masa arbitraria y dos masas puntuales en sus extremos. Gómez *et al.* [8] analizaron teóricamente los modos normales de oscilación de una cuerda cargada con una y con dos masas y propusieron un simple dispositivo experimental para visualizarlos y medir sus correspondientes frecuencias propias.

La física de las ondas juega un rol importante en la educación de físicos e ingenieros. En particular las ondas en cuerdas son ondas visibles que proveen una simple introducción a los fenómenos ondulatorios y son muy útiles para comprender situaciones más complejas. En este trabajo se estudia la influencia de parámetros concentrados sobre los modos normales de oscilación de un medio continuo de dimensiones finitas. En particu-

<sup>1</sup>E-mail: weltireinaldo@arnet.com.ar.

lar, se extienden los resultados obtenidos en Ref. [8] a otros sistemas físicos como el caso de una antena dipolo corta con una inductancia concentrada y el de un tubo con una cámara de expansión en su punto medio. Las cuerdas cargadas y los tubos corrugados permiten realizar experimentos simples para simular el comportamiento de ondas en un medio periódico [8-10]. Es de destacar que los problemas aquí abordados pueden ser utilizados tanto en cursos introductorios como avanzados de física.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se hace un resumen de los resultados obtenidos en Ref. [8] sobre las oscilaciones de una cuerda cargada en su punto medio. En la sección 3 se analiza el caso de una antena dipolo corta con inductancias concentradas en el punto medio de sus dos ramas. Se muestra que en su modo fundamental, la longitud física de la antena puede ser sensiblemente menor que la media longitud de onda. En la sección 4 se estudian los modos normales de oscilación de un tubo con una cámara de expansión en su punto medio. Se observa que, cuando la longitud de la cámara de expansión disminuye y su sección aumenta, manteniendo su volumen constante, las autofunciones y autofrecuencias de este problema son idénticos al de la cuerda cargada con una masa puntual en su punto medio. Finalmente, en la sección 5 se discuten las conclusiones del trabajo.

## 2. Oscilaciones de una cuerda continua con una masa concentrada

Se considera una cuerda fija en sus dos extremos ( $x = -L$  y  $x = L$ ) con una masa  $M$  concentrada en su punto medio ( $x_i = 0$ ), como se muestra en la Fig. 1. Debido a la masa concentrada, la cuerda puede considerarse no homogénea con una densidad de masa por unidad de longitud  $\mu(x)$  dada por

$$\mu(x) = \mu_0 + M\delta(x - x_i), \quad (1)$$

donde  $\mu_0$  es la densidad de la cuerda, supuesta constante, y  $\delta$  es la función *delta de Dirac*.

La ecuación que describe las oscilaciones transversales de la cuerda no homogénea es

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2)$$

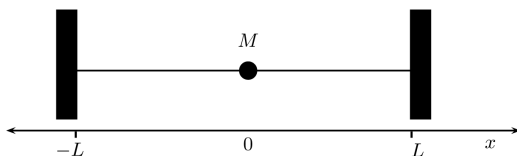


Figura 1 - Cuerda de masa  $\mu_0$  por unidad de longitud cargada en su punto medio con una masa puntual  $M$ . La tensión sobre toda la cuerda es  $T$ .

donde  $u(x, t)$  es el desplazamiento transversal de un punto  $x$  de la cuerda en el instante  $t$ , y  $T$  es la tensión de la cuerda.

Integrando la ecuación (2) con respecto a  $x$  desde  $0 - \epsilon$  hasta  $0 + \epsilon$ , y efectuando el paso al límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene la condición de empalme

$$\left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{0-}^{0+} = M \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Otra condición que debe satisfacerse en el punto 0 es la continuidad de los desplazamientos transversales, esto es

$$u(0^-, t) = u(0^+, t). \quad (4)$$

Nuestro problema puede formularse ahora de la siguiente forma: encontrar las soluciones de la ecuación de ondas homogénea

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5)$$

que satisfaga las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(-L, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

y las condiciones de empalme (3) y (4) en el punto  $x = 0$ .

Para el análisis de las oscilaciones propias de la cuerda debemos hallar las soluciones del problema que se escriban en la forma del producto

$$u(x, t) = \Phi(x)e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5) obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left( T \frac{d\Phi}{dx} \right) + \omega^2 \mu_0 \Phi = 0, \quad (8)$$

junto a las siguientes condiciones

$$\Phi(-L) = 0, \quad \Phi(L) = 0 \quad (9)$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(0^-) &= \Phi(0^+) \\ \left( T \frac{d\Phi}{dx} \right)_{0-}^{0+} &= -M\omega^2 \Phi(0). \end{aligned} \quad (10)$$

La ecuación (8) y las condiciones (9) y (10) constituyen un problema de autovalores. La solución correspondiente puede ser representada como sigue

$$\Phi(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen}(k(x + L)) & -L \leq x \leq 0 \\ B \operatorname{sen}(k(x - L)) & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (11)$$

donde  $k = \omega/c$  y  $c = \sqrt{T/\mu_0}$  es la velocidad de las ondas transversales sobre la cuerda. Las condiciones de empalme (10) se satisfacen siempre que

$$F_1(kL) F_2(kL) = 0, \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(kL) &= \text{sen}(kL), \\ F_2(kL) &= p \text{sen}(kL) - 2 \cos(kL), \end{aligned} \quad (13)$$

siendo  $p = M\omega^2/Tk = (M/m)kL$ , y  $m = \mu_0 L$  es la masa de cada uno de los tramos de la cuerda. A partir de las ecuaciones (13) se obtienen dos conjuntos de autovalores (y autofunciones) del problema considerado.

Los autovalores relacionados a  $F_1$  son  $k_{n'} = n'\pi/L$  (donde  $n$  es natural) mientras que, las correspondientes autofunciones coinciden con los modos de índice par de una cuerda de longitud  $2L$  sin carga. Como estos modos tienen un nodo en  $x = 0$ , no se ven afectados por la presencia de la masa concentrada en ese punto. Estos modos poseen, entonces, pendiente continua en  $x = 0$  y resultan antisimétricos respecto de  $x = 0$  [8].

Del conjunto de autovalores asociados al factor  $F_2$  se encuentran autofunciones que poseen un salto en la pendiente en el punto  $x = 0$  (modos de pendiente discontinua). Estos modos son *simétricos* respecto de  $x = 0$  [8].

En la Fig. 2, mostramos los autovalores  $k_n L$  correspondientes a los primeros modos normales de oscilación de una cuerda de longitud  $2L$ , fija en sus dos extremos, y cargada en el punto medio con una masa  $M = m$ . De acuerdo a la notación utilizada, los modos de índice  $n$  impar, son modos de pendiente discontinua, mientras que aquellos de índice  $n$  par son modos de pendiente continua. En la Fig. 2 se muestran los correspondientes modos normales  $\Phi_n$  como función de la posición  $x$ . Como puede verse en la misma figura, ambos tipos de modos se alternan, siendo un modo de pendiente discontinua el modo de frecuencia más baja. Es sencillo mostrar que en el límite en que  $M \gg m$  sólo los modos pares de una cuerda homogénea de longitud  $2L$  se obtienen como soluciones del problema de la cuerda cargada. Por otro lado, si  $M \ll m$ , se encuentran todos los modos de la cuerda vibrante homogénea.

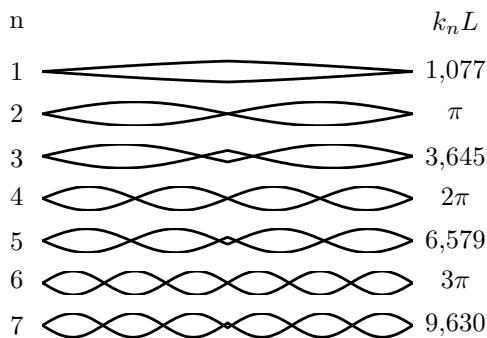


Figura 2 - Modos normales de una cuerda homogénea con una masa  $M = m$  concentrada en su punto medio. La densidad de masa lineal de cada segmento de cuerda es  $\mu_0 = m/L$ . A la derecha de los modos se encuentran los autovalores correspondientes.

### 3. Antena dipolo con una carga inductiva en su punto medio

A bajas frecuencias, las limitaciones de espacio generalmente no permiten usar una antena que tenga una media longitud de onda (cada rama es de un cuarto de longitud de onda). Si la longitud física de la antena es menor que una media longitud de onda, la resistencia de radiación se reduce considerablemente y su impedancia de entrada tiene una reactancia capacitiva grande. El sistema usualmente se sintoniza (impedancia de entrada nula) insertando una inductancia concentrada en serie en cada una de las ramas de la antena, como se muestra en la Fig. 3.

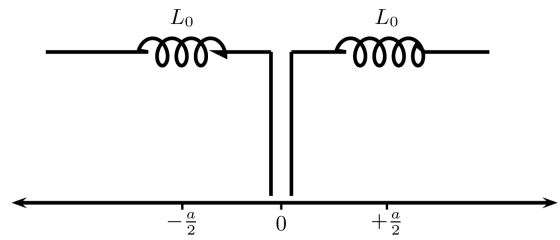


Figura 3 - Las dos ramas de una antena dipolo con inductancias concentradas  $L_0$ .

Este método se utiliza desde hace décadas en el rango de frecuencias 30 – 300 MHz (longitudes de onda en el rango 1-10 m) y más recientemente en la telefonía celular donde la constante disminución de las dimensiones del teléfono móvil no está acompañada por un decrecimiento en la longitud de onda utilizada (longitudes de onda del orden de 0.30 m) [11].

La antena dipolo puede ser modelada como una línea de transmisión con inductancia y capacidad por unidad de longitud,  $l$  y  $c$ , respectivamente [12]. En este caso, las ecuaciones para la tensión  $V(x)e^{i\omega t}$  y la corriente  $I(x)e^{i\omega t}$ , en el estado estacionario sinusoidal, sobre la antena son

$$\frac{dV}{dx} = -i\omega I, \quad \frac{dI}{dx} = -ic\omega V. \quad (14)$$

Combinando estas ecuaciones podemos encontrar la siguiente ecuación para  $I(x)$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + \omega^2 lc I = 0. \quad (15)$$

La capacidad por unidad de longitud es constante, esto es  $c=c_0$ , pero debido a la inductancia concentrada  $L_0$ , en  $x = \frac{a}{2}$ , la inductancia por unidad de longitud viene dada por

$$l = l_0 + L_0 \delta(x - \frac{a}{2}), \quad (16)$$

donde  $\delta$  es la función delta de Dirac. Siguiendo el mismo procedimiento de la sección 2 se muestra que el problema se reduce a encontrar las soluciones de

la ecuación (15) que satisfagan las condiciones de empalme

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)_{\frac{a}{2}-0}^{\frac{a}{2}+0} = -L_0 c_0 \omega^2 I\left(\frac{a}{2}\right), \quad (17)$$

$$I\left(\frac{a}{2} + 0\right) = I\left(\frac{a}{2} - 0\right),$$

y las condiciones de contorno

$$\frac{dI(0)}{dx} = 0, \quad I(a) = 0. \quad (18)$$

La ecuación (15) y las condiciones (17) y (18) constituyen un problema de autovalores casi idéntico al que se analiza en la sección 2. La solución puede ser representada, entonces, mediante las funciones

$$I(x) = \begin{cases} A \cos(kx) & 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ B \operatorname{sen}(k(x-a)) & \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases} \quad (19)$$

donde  $k = \omega l_0 c_0$ . Reemplazando (19) en las condiciones de empalme (17) se obtiene la relación de dispersión

$$\cos(ka) - \frac{L_0}{2L} k a \operatorname{sen}(ka) = 0, \quad (20)$$

donde  $L = la$ . Observemos que esta ecuación es idéntica a la ecuación (13). Si  $L_0 = 0$ , esta ecuación se reduce a  $\cos(ka) = 0$  y por lo tanto  $ka = (2n - 1)\pi/2$ , donde  $n$  es un número natural. En esta situación el autovalor más bajo es  $ka = \pi/2$  y, por lo tanto,  $a = \lambda/4$ , o sea, que la longitud total de la antena debe ser  $2a = \lambda/2$ . Esta es la antena de media onda sin carga inductiva. Si la antena está cargada en su punto medio con una inductancia concentrada  $L_0 = la$ , el autovalor más bajo es  $ka = 0.835$ , esto implica que la longitud total de la antena es ahora  $2a = 0.266\lambda$ . Se consigue de esta manera un acortamiento del 53.2% en la longitud de la antena, sin reducir significativamente su resistencia de radiación. En la Fig. 4 se muestra la distribución de tensión y corriente, correspondientes al autovalor más bajo, en una de las ramas de una antena dipolo cargada en su punto medio.

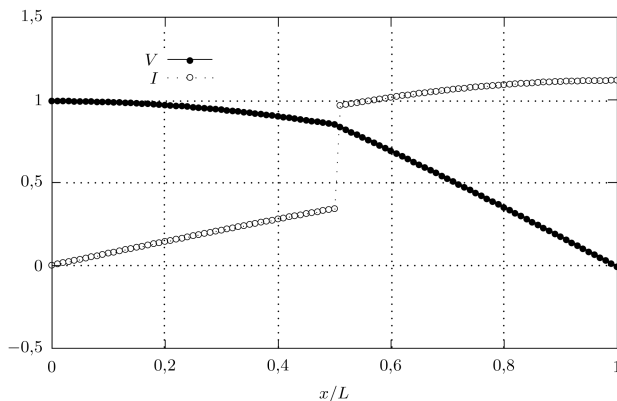


Figura 4 - Distribución de tensión y corriente para el modo fundamental sobre una de las ramas de una antena con inductancia concentrada en su punto medio.

#### 4. Tubo con una cámara de expansión en su punto medio

En este apartado vamos a estudiar los modos acústicos de un tubo de sección  $S_1$  abierto en sus dos extremos, al que se le ha insertado un tubo de sección  $S_2$  y longitud  $d$  como se muestra en la Fig. 5. La longitud total del sistema es  $2L$ . Vamos a mostrar que si  $d \ll L$  y  $S_1 \ll S_2$ , los modos normales de oscilación de este sistema son análogos al de la cuerda con una carga en su punto medio que se analizó en la sección 2.

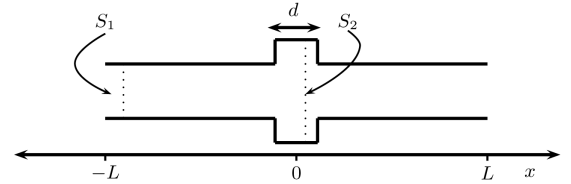


Figura 5 - Tubo con cámara de expansión en su punto medio, cuya longitud total es  $2L$ .

Las ecuaciones que describen a las ondas sonoras en el interior del tubo vienen dadas por

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathcal{B} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (22)$$

donde  $p$  y  $v_x$  son las variaciones (al primer orden) de la presión y la velocidad del gas producidas por la onda,  $\mathcal{B}$  es el módulo de compresibilidad y  $\rho_0$  la densidad del gas. Si derivamos (21) respecto del tiempo y utilizamos (22) obtenemos la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

donde  $c = \sqrt{\mathcal{B}/\rho_0}$ , es la velocidad de propagación de la onda sonora. La solución armónica de la ecuación diferencial (23) es

$$p(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} + B e^{i(\omega t + kx)}. \quad (24)$$

Como  $v_x$  también verifica la ecuación de ondas se tiene que

$$v_x(x, t) = C e^{i(\omega t - kx)} + D e^{i(\omega t + kx)}. \quad (25)$$

Reemplazando (24) y (25) en (21) y (22) obtenemos para  $v_x$  la siguiente expresión

$$v_x(x, t) = \frac{A}{Z_0} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B}{Z_0} e^{i(\omega t + kx)}, \quad (26)$$

donde  $Z_0 = \rho_0 c$  es la impedancia acústica específica.

Las condiciones de contorno en  $x = -\frac{d}{2}$  y  $x = \frac{d}{2}$ , donde se producen los cambios de sección, son: la continuidad de la presión  $p$  y la continuidad del flujo de volumen  $U = Sv_x$  [13], mientras que en los extremos abiertos,  $x = -L$  y  $x = L$ , la sobrepresión  $p$  es nula (si se desprecia el efecto de borde). Utilizando el método de separación de variables, consideramos las soluciones bajo la forma

$$p(x, t) = p(x)e^{i\omega t}, \quad U(x, t) = U(x)e^{i\omega t}. \quad (27)$$

Entonces, las correspondientes soluciones en las tres secciones del tubo de la Fig. 5 son

$$\begin{aligned} p_1(x) &= A_1 \operatorname{sen} k(x + L), \\ U_1(x) &= \frac{iA_1}{Z_1} \cos k(x + L), \end{aligned} \quad (28)$$

para  $-L \leq x \leq -\frac{d}{2}$ ,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= A_2 e^{i(\omega t - kx)} + B_2 e^{i(\omega t + kx)}, \\ U_2(x) &= \frac{A_2}{Z_2} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{B_2}{Z_2} e^{i(\omega t + kx)}, \end{aligned} \quad (29)$$

para  $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$ ,

$$\begin{aligned} p_3(x) &= A_3 \operatorname{sen} k(x - L), \\ U_3(x) &= \frac{iA_3}{Z_1} \cos k(x - L), \end{aligned} \quad (30)$$

para  $\frac{d}{2} \leq x \leq L$  y donde  $Z_i = \frac{Z_0}{S_i}$  con  $i = 1, 2$  es la correspondiente impedancia acústica del tramo de tubo de sección  $S_i$ .

Las ecuaciones (28) y (30) satisfacen las condiciones de contorno en  $x = -L$  y  $x = L$ , respectivamente. Las condiciones de borde en  $x = -\frac{d}{2}$  y  $x = \frac{d}{2}$ , respectivamente, se escriben de la forma

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} k(L - \frac{d}{2}) &= A_2 e^{ik\frac{d}{2}} + B_2 e^{-ik\frac{d}{2}}, \\ i \frac{A_1}{Z_1} \cos k(L - \frac{d}{2}) &= \frac{A_2}{Z_2} e^{ik\frac{d}{2}} - \frac{B_2}{Z_2} e^{-ik\frac{d}{2}}, \\ -A_3 \operatorname{sen} k(L - \frac{d}{2}) &= A_2 e^{ik\frac{d}{2}} - B_2 e^{-ik\frac{d}{2}}, \\ i \frac{A_3}{Z_1} \cos k(L - \frac{d}{2}) &= \frac{A_2}{Z_2} e^{-ik\frac{d}{2}} - \frac{B_2}{Z_2} e^{ik\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

La ecuación que determina la frecuencia de los modos propios se encuentra igualando a cero el discriminante del sistema de ecuaciones (31). A fin de facilitar las cuentas es conveniente buscar, por separado, los autovalores de los modos simétricos y antisimétricos. Para los modos simétricos,  $A_3 = -A_1$ ,  $B_2 = A_2$ , el sistema de ecuaciones (31) se reduce a

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} k(L - \frac{d}{2}) &= 2A_2 \cos(k\frac{d}{2}), \\ \frac{A_1}{Z_1} \cos k(L - \frac{d}{2}) &= 2\frac{A_2}{Z_2} \operatorname{sen}(k\frac{d}{2}). \end{aligned} \quad (32)$$

En el límite  $d \rightarrow 0$ ,  $S_2 \rightarrow \infty$ , pero manteniendo el producto  $S_2 d$  finito, la ecuación que determina las frecuencias de los modos normales simétricos viene dada por

$$\operatorname{sen}(kL) - 2\frac{m}{M} \frac{1}{kL} \cos(kL) = 0, \quad (33)$$

donde  $m = \rho_0 S_1 L$  y  $M = \rho_0 S_2 d$ , son las masas de aire en el interior de los tubos de sección  $S_1$  y en el de la cámara de expansión (sección  $S_2$ ), respectivamente. Por otro lado, para los modos antisimétricos,  $A_3 = A_1$ ,  $B_2 = -A_2$  el sistema de ecuaciones (31) resulta

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} k(L - \frac{d}{2}) &= 2iA_2 \operatorname{sen}(k\frac{d}{2}), \\ i \frac{A_1}{Z_1} \cos k(L - \frac{d}{2}) &= 2\frac{A_2}{Z_2} \cos(k\frac{d}{2}). \end{aligned} \quad (34)$$

En el límite  $d \rightarrow 0$ ,  $S_2 \rightarrow \infty$ , la ecuación que determina las frecuencias de los modos normales antisimétricos es

$$\operatorname{sen}(kL) = 0. \quad (35)$$

Observemos que las ecuaciones (35) y (33) son idénticas a las ecuaciones (12) y (13) que determinan los autovalores de una cuerda cargada en su punto medio. En la Tabla 1 se muestran las frecuencias propias de un tubo de longitud  $2L = 1$  m, con una cámara de expansión de longitud  $d$ , para diferentes valores de  $d$ , mientras que en la Fig. 6 se muestran sus modos normales. El volumen de esta cámara es, en todos los casos, igual al volumen de las porciones adyacentes. Observamos que cuando  $d = 0.01$  m los valores relativos  $f_n/f_1$  de las frecuencias propias calculadas son muy próximos a los valores relativos de las frecuencias propias para la cuerda cargada en su punto medio [8].

Tabla 1 - Frecuencias propias de un tubo de longitud total  $2L = 1$  m, con una cámara de expansión de longitud  $d$ , cuyo volumen coincide con las otras dos porciones de menor sección, para diferentes valores de  $d$ .

$d(m)$	0,2	0,1	0,05	0,01
$f_1(Hz)$	145,6	130,1	122,1	117,7
$f_2/f_1$	2,573	2,849	2,903	2,917
$f_3/f_1$	3,302	3,369	3,382	3,383
$f_4/f_1$	4,875	5,679	5,806	5,834
$f_5/f_1$	5,875	6,073	6,103	6,109
$f_6/f_1$	6,875	8,447	8,796	8,750
$f_7/f_1$	8,448	8,882	9,025	8,944

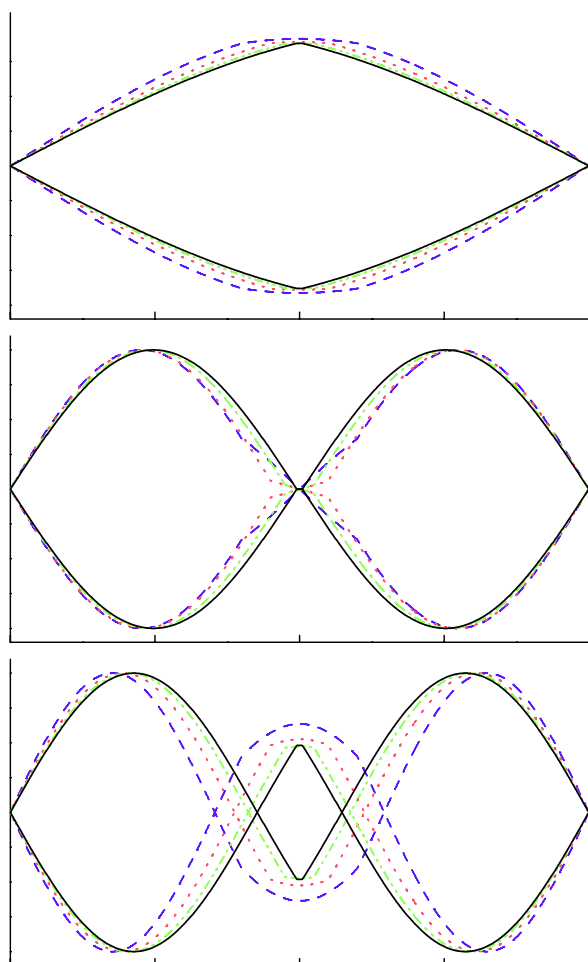


Figura 6 - Modos normales de un tubo de longitud  $2L = 1$  m con una cámara de expansión de longitud  $d$  y sección  $S$ . Se consideran los mismos valores de  $d$  de la Tabla 1

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han analizado los efectos de la inserción de elementos de parámetros concentrados sobre los modos normales de oscilación de un medio finito continuo unidimensional en tres sistemas muy simples: una cuerda cargada con una masa puntual, una antena dipolo cargada con una inductancia concentrada y un tubo con una cámara de expansión. Se muestra que las ecuaciones que determinan las frecuencias propias de estos tres sistemas son prácticamente idénticas entre sí. En todos los casos la inserción del parámetro concentrado reduce la frecuencia del primer modo mientras que los modos pares, que tienen un nodo en el punto medio, resultan prácticamente inalterados. Si la masa concentrada en el punto medio es mucho más grande que la masa de las cuerdas adyacentes o si la sección de la cámara de expansión es muy grande comparada con la sección de los tubos adyacentes, la frecuencia del segundo modo puede ser mucho más grande (mucho más que el doble) que la frecuencia del modo más bajo.

En acústica, un sistema que oscila en su modo más

bajo en las condiciones mencionadas arriba, se denomina oscilador Helmholtz. De acuerdo con los resultados de este trabajo podemos afirmar que el modo Helmholtz puede ser encontrado tanto en sistemas mecánicos como electromagnéticos siempre que la dimensión del sistema sea mucho menor que la longitud de onda y que esté compuesto, al menos, de dos tramos que presenten una discontinuidad fuerte en alguno de sus parámetros característicos.

Por último queremos destacar que los sistemas físicos aquí estudiados pueden ser fácilmente reproducidos para su estudio, en un laboratorio de física básica, como el descrito en Ref. [8] para el estudio de los modos normales de oscilación de la cuerda cargada con una masa puntual en su punto medio.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina, y a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, Argentina y a la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, por la financiación de estas investigaciones.

## Referencias

- [1] I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830* (MIT Press, Cambridge, 1972).
- [2] J. Lagrange, *Œuvres* (Gauthiers-Villiers, Paris, 1867), quoted in A. Boudaoud, Y. Couder and M. Ben Amar, *Eur. Phys. J. B* **9**, 159 (1999).
- [3] J.W.S. Rayleigh, *The Theory of Sound* (Dover, Nueva York, 1894), 2nd. ed., reprinted 1945.
- [4] H.L.V. Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (Dover, Nueva York, 1877), reprinted 1954.
- [5] Y. Chen, *Journal of the Franklin Institute* **276**, 191 (1963).
- [6] S. Parmley, T. Zobrist, T. Clough, A. Perez-Miller, M. Makela and R. Yu, *Am. J. Phys.* **63**, 547 (1995).
- [7] F.C. Santos, Y.A. Coutinho, L. Ribeiro-Pinto and A.C. Tort, *Eur. J. Phys.* **27**, 1037 (2006).
- [8] B.J. Gómez, C.E. Repetto, C.R. Stia and R. Welti, *Eur. J. Phys.* **28**, 961 (2007).
- [9] D. Lürben, N. Easwar, A. Malhotra, L. Hutchins, K. Schulze and B Wilcox, *Am. J. Phys.* **72**, 197 (2004).
- [10] C. Carr and R. Yu, *Am. J. Phys.* **70**, 1154 (2002).
- [11] J. Thaysen and K.B. Jakobsen, *Microwave Journal* **48**, 7 (2005).
- [12] R.E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation* (McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1985).
- [13] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens and J.V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1982).