

# Capturando la física de los resonadores Helmholtz con la ecuación de ondas acústica



**Maricel Matar, Reinaldo Welti**

*Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario, Avenida Pellegrini 250, CP 2000, Rosario, Argentina.*

**E-mail:** welti@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 2 de Diciembre; aceptado el 10 de Enero de 2009)

## Resumen

En este trabajo se muestra cómo a partir de la solución analítica de la ecuación de ondas se puede recuperar el ingenioso modelo utilizado por Helmholtz para determinar la frecuencia de resonancia más baja de una cavidad acústica que tiene forma de botella.

**Palabras clave:** Resonador Helmholtz, ecuación de ondas, elasticidad del aire.

## Abstract

In this paper we show how from the analytic solution of the wave equation we can recover the ingenious model used by Helmholtz to determine the lowest resonance frequency of an acoustic cavity that is shaped like a bottle.

**Keywords:** Helmholtz resonator, waves equations, air elasticity

**PACS:** 43.10.Sv, 43.20. Ks, 43.20. Wd

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Los primeros resonadores Helmholtz [1] fueron construidos por H. von Helmholtz en 1860, quien los utilizó, entre otras cosas, para demostrar que cualquier sonido musical complejo puede ser considerado como una mezcla de la frecuencia fundamental y sus armónicos con diferentes amplitudes. Las teorías de Helmholtz sobre el sonido han tenido un impacto considerable en su época y han estimulado a muchos investigadores a realizar estudios sobre las relaciones entre la física, la psicología y la música. Rudolph Koenig, el fabricante del resonador que se muestra en la figura 1, hizo suya la profesión de “materializar las ideas de Helmholtz en aparatos” [2].

Un ejemplo de la resonancia Helmholtz es el sonido que se crea cuando uno sopla transversalmente sobre el cuello de una botella. Cuando se fuerza al aire a introducirse en una cavidad, la presión interior de la misma crece. Una vez que el agente externo que fuerza al aire hacia el interior de la cavidad desaparece, el aire comprimido del interior fluye hacia afuera. Este flujo de aire tiende a sobre-compensar la diferencia de presión. Debido a la inercia del aire en el cuello una pequeña porción de aire sale al exterior de modo que la presión de la cavidad disminuye, alcanzando un valor ligeramente menor que la externa y esto hace que el aire de nuevo fluya hacia el interior. Este proceso tiende a repetirse de manera continua, sin embargo, los cambios de presión van decreciendo.

Este comportamiento es similar a las oscilaciones libres amortiguadas de una masa atada al extremo de un resorte. El aire atrapado en la cámara actúa como el

resorte. El aire, como es compresible, tiene una constante elástica [3].



**FIGURA 1.** Resonador Helmholtz construido por R. Koenig en el año 1865.

Los cambios en las dimensiones de la cámara modifican las propiedades elásticas del “resorte”: una cámara grande tendrá una constante menor, y viceversa. El aire en el cuello es la masa del oscilador. El aire en el cuello tiene una velocidad mayor que el aire en la cámara. Si el cuello

es más largo su masa será más grande, y viceversa. Si el cuello tiene una sección muy pequeña comparada con la sección de la cámara la velocidad en el cuello será muy grande mientras que si su sección aumenta la velocidad se reducirá.

En la sección 2, vamos a mostrar cómo Helmholtz se valió de un modelo basado en los razonamientos de los párrafos anteriores para calcular la frecuencia de resonancia de una cavidad acústica que tiene la forma de una botella.

Se puede también encontrar la frecuencia de resonancia de la botella resolviendo la ecuación de ondas en su interior, con las condiciones de borde adecuadas [4]. Este procedimiento se presenta en la sección 3. Con este método, sin embargo, se enmascara el elegante razonamiento físico realizado por Helmholtz [1] [5]. El objetivo de este trabajo es mostrar como, a partir de la solución analítica de la ecuación de ondas, se puede recuperar el modelo utilizado por Helmholtz y determinar las condiciones de su validez. En la sección 4 se muestra que cuando la longitud del sistema es pequeña comparada con la longitud de onda y la sección del cuello pequeña comparada con la sección de la cámara, la energía potencial del sistema se concentra en la cámara y la energía cinética en el cuello. La energía total del sistema se mantiene constante, alternándose de potencial a cinética de la misma forma que en un resorte. Utilizando las expresiones analíticas de estas energías se calcula la constante elástica efectiva de la cámara.

La solución de la ecuación de ondas muestra que la botella, además del modo Helmholtz, tiene infinitas frecuencias de resonancias. El modo Helmholtz tiene lugar solamente cuando la impedancia acústica de las dos partes del sistema (cuello y cámara) son muy diferentes. Si el radio del cuello aumenta, la frecuencia del modo Helmholtz aumenta y tiende a la frecuencia más baja del tubo cerrado – abierto de sección constante que se obtiene cuando la sección del cuello se hace igual a la sección de la cámara.

## II. LA FÓRMULA DE HELMHOLTZ

Consideremos una botella como la que se muestra en la figura 2 que tiene un gran volumen  $V_2$  y un cuello estrecho de longitud  $L_1$  y sección  $S_1$ . El volumen del pico  $V_1 = S_1 L_1$  es muy pequeño comparado con  $V_2$ . La botella está abierta a la atmósfera que tiene una densidad  $\rho_0$  y presión  $p_0$ .

Helmholtz [1] [5] para encontrar la frecuencia de una de las oscilaciones libres que puede realizar este sistema, supuso que el aire en el cuello se mueve como un pistón sólido mientras que el aire en el volumen principal de la botella se comprime y expande de manera alternativa como si fuera un resorte.

Si la masa de aire  $m$  en el interior del cuello se desplaza, en un cierto instante una distancia  $x$  hacia la derecha como se muestra en la figura 2, la presión interna desciende y como resultado se obtiene una fuerza que trata

de llevar a esta masa de aire a su posición de equilibrio. Esta fuerza de restitución  $F_x$  se debe a la diferencia de presión  $\delta p$ , entre la presión interna y la presión externa, y viene dada por:

$$F_x = \delta p S_1, \tag{1}$$

donde  $S_1$  es la sección del cuello.

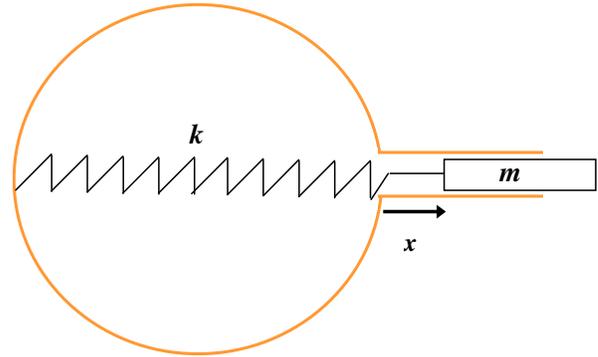


FIGURA 2. Modelo para encontrar la frecuencia más baja de oscilación de la botella.

La variación de presión  $\delta p$  se relaciona con la variación de volumen  $\delta V$  a través del *módulo de compresibilidad*  $B$  del gas [6]:

$$\delta p = -B \frac{\delta V}{V_2}. \tag{2}$$

La variación de volumen viene dada por  $\delta V = S_1 x$ , entonces:

$$F_x = -B \frac{S_1^2 x}{V_2} = -k_{eq} x, \tag{3}$$

donde

$$k_{eq} = B \frac{S_1^2}{V_2}, \tag{4}$$

es la constante elástica equivalente del aire contenido en el volumen principal.

La masa del aire en el cuello de la botella es  $m = \rho_0 S_1 L_1$ . Por lo tanto, la frecuencia angular  $\omega$  viene dada por

$$\omega_H = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = c \sqrt{\frac{S_1}{V_2 L_1}}, \tag{5}$$

donde  $c = \sqrt{B/\rho_0}$  es la velocidad del sonido en el aire.

Para una botella abierta a la atmósfera,  $c \approx 340 \text{ m/s}$ , y de dimensiones,  $V_2 = 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $S_1 = 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $L_1 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ , se tiene  $\omega_H \approx 477.15 \text{ s}^{-1}$  o sea  $f \approx 75.98 \text{ Hz}$ . Si se sopla suave y sostenidamente la boca de la botella se obtiene un sonido de esta frecuencia aproximadamente.

### III SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDAS EN EL INTERIOR DE UN TUBO DE SECCIÓN CONSTANTE

Suponemos que la sección transversal del tubo es circular y que sus dimensiones y/o el intervalo de frecuencias exploradas son tales que solamente se excita el modo longitudinal de más baja frecuencia. Esto se cumple si la frecuencia de la onda  $f$  es menor que la frecuencia de corte  $f_c$  del modo transversal superior más cercano que viene dado por  $f_c \approx 0.92c/\pi a$  donde  $c$  es la velocidad del sonido y  $a$  el diámetro del tubo [7].

Simbolizamos con  $p$ ,  $\rho$  y  $v_x$  las pequeñas variaciones de la presión, densidad y la componente  $x$  de la velocidad de un fluido, que se encuentra en el interior de un tubo de sección constante, respecto a los valores constantes de la presión  $p_0$ , de la densidad  $\rho_0$  y de la velocidad  $v_{0x} = 0$ . Nota:  $p$  es ahora la variación de presión que en la sección anterior designamos con  $\delta p$ .

Si retenemos solamente los términos de primer orden y si se supone que los movimientos del fluido son adiabáticos, la ecuación de conservación de la masa y la ecuación de movimiento de Euler toman la forma [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -B \frac{\partial v_x}{\partial x}, & (a) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, & (b) \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $B$  es el módulo de compresibilidad adiabático del fluido.

De estas ecuaciones se deduce que  $p$  (y  $v_x$ ) satisface la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Para encontrar la solución armónica de esta ecuación hacemos

$$p(x,t) = \tilde{p}(x)e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Remplazando (8) en (7) encontramos

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + \beta^2 \tilde{p} = 0, \quad (9)$$

donde  $\beta = \omega/c$ .

La solución de esta ecuación diferencial es inmediata y viene dada por

$$\tilde{p} = Ae^{-i\beta x} + Be^{i\beta x}. \quad (10)$$

La velocidad del fluido asociada a esta onda de presión viene dada por

$$v_x(x,t) = \tilde{v}_x(x)e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Si reemplazamos (11) y (10) en la ecuación (6b) encontramos

$$\tilde{v}_x = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-i\beta x} - Be^{i\beta x}), \quad (12)$$

donde  $Z_0 = \rho_0 c$  es la impedancia característica del fluido.

### IV SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDAS EN EL INTERIOR DE UNA BOTELLA

Para simplificar el problema vamos a suponer que la botella tiene una sección circular que abruptamente cambia de radio, al pasar del cuello (región 1) a su volumen principal (región 2) como se muestra en la Fig. 3. La sección y longitud del cuello son  $S_1$  y  $L_1$ , mientras que la sección y longitud del volumen principal son  $S_2$  y  $L_2$  respectivamente. Como en el cuello y en el volumen principal la sección es constante, en cada una de estas regiones la presión debe satisfacer la ecuación de ondas (7).

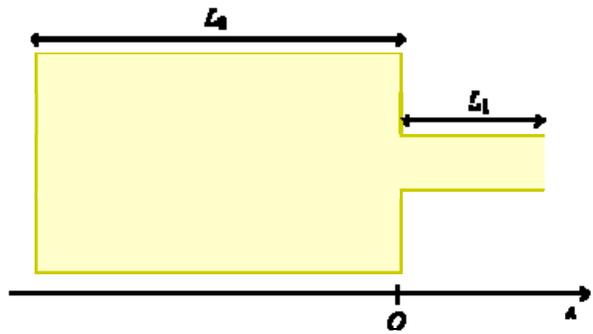


FIGURA 3. Botella de sección circular. La sección  $S_2$  del volumen principal cambia abruptamente a  $S_1$  en el cuello.

En la región 1, la presión (si no se tiene en cuenta el efecto de borde) debe ser nula en  $x = L_1$ . La solución armónica de la ecuación (7) que satisface esta condición de borde viene dada por

$$\tilde{p}_1(x) = A_1 \sin \beta(L_1 - x). \quad (13)$$

La onda de velocidad del fluido asociada es

$$\tilde{v}_1(x) = -i \frac{A_1}{Z_0} \cos \beta(L_1 - x). \quad (14)$$

En la región 2, la presión debe ser máxima en  $x = -L_2$ . La solución armónica de la onda de presión que satisface esta condición viene dada por

$$\tilde{p}_2(x) = A_2 \cos \beta(L_2 + x). \quad (15)$$

La onda de velocidad asociada es

$$\tilde{v}_2(x) = -i \frac{A_2}{Z_0} \sin \beta(L_2 + x). \quad (16)$$

Para empalmar las soluciones en  $x = 0$  debemos establecer las condiciones de contorno en esa sección. Como en una onda sonora  $p \ll p_0$  y  $\rho \ll \rho_0$ , el aire se comprime muy poco, entonces podemos suponer que el volumen se conserva. Si despreciamos el flujo de aire en la dirección radial, que tiene lugar en las proximidades de  $x = 0$ , la condición de contorno viene dada por [7]

$$S_1 \tilde{v}_1(0) = S_2 \tilde{v}_2(0). \quad (17)$$

La otra condición de contorno es la continuidad de la presión,

$$\tilde{p}_1(0) = \tilde{p}_2(0), \quad (18)$$

en efecto, si  $\tilde{p}_1(0) \neq \tilde{p}_2(0)$ , la masa infinitesimal que se encuentra en un pequeño entorno alrededor de  $x = 0$  tendría una aceleración infinita.

Las condiciones (17) y (18) nos proporcionan las ecuaciones

$$\frac{A_1}{Z_{a1}} \cos \beta L_1 - \frac{A_2}{Z_{a2}} \sin \beta L_2 = 0, \quad (19)$$

$$A_1 \sin \beta L_1 - A_2 \cos \beta L_2 = 0, \quad (20)$$

donde  $Z_{a1} = Z_0 / S_1$  y  $Z_{a2} = Z_0 / S_2$  son las impedancias acústicas de los medios 1 y 2, respectivamente.

Los autovalores del sistema se encuentran anulando el discriminante del sistema, lo que nos da

$$Z_{a1} \sin kL_1 \sin kL_2 - Z_{a2} \cos kL_1 \cos kL_2 = 0. \quad (21)$$

Esta ecuación puede escribirse de la forma

$$\tan \beta L_1 \tan \beta L_2 = \frac{Z_{a2}}{Z_{a1}} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (22)$$

Si  $\beta L_1 \ll 1$  y  $\beta L_2 \ll 1$ , la ecuación (22) se reduce a

$$\beta^2 L_1 L_2 = \frac{S_1}{S_2}, \quad (23)$$

que nos lleva a la fórmula de Helmholtz:

$$\beta = \frac{\omega_H}{c} = \sqrt{\frac{S_1}{V_2 L_1}} \quad (24)$$

Como  $\beta L_1 \ll 1$  y  $\beta L_2 \ll 1$ , la longitud de onda  $\lambda$  es mucho mayor que  $L_1$  y  $L_2$  y el sistema puede considerarse

de parámetros concentrados [7] como supuso Helmholtz para construir su modelo.

Si  $S_1 / S_2 = 1$ , el sistema resulta un tubo uniforme de longitud  $L_1 + L_2$ . En esta situación, la ecuación (22) se reduce a

$$\tan \beta L_1 = \cot \beta L_2,$$

Como,  $1 - \tan \alpha \tan \beta = (\tan \alpha + \tan \beta) \cot(\alpha + \beta)$ , esta ecuación implica que  $\cot(kL_1 + kL_2) = 0$ , lo que nos da

$$\beta L_1 + \beta L_2 = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots,$$

que corresponden a los modos de un tubo de longitud  $L_1 + L_2$  cerrado en un extremo y abierto en el otro.

Si se mantiene  $S_2$  constante mientras  $S_1$  tiende a cero, se obtiene una “cavidad” de longitud  $L_2$  cerrada en sus dos extremos. La ecuación (22) se transforma en  $\tan \beta L_2 = 0$  cuyas soluciones son  $\beta L_2 = \pi, 2\pi, \dots$ . Estos autovalores corresponden a los modos de un cilindro de longitud  $L_2$  cerrado en ambos extremos.

En estos dos casos,  $S_1 / S_2 \rightarrow 1$  y  $S_1 / S_2 \rightarrow 0$ , la longitud de onda del modo más bajo es comparable a la dimensión del sistema (la cuarta parte y la mitad, respectivamente). Estos modos, si bien son los que tienen la frecuencia más baja, no son modos Helmholtz, ya que sus longitudes de onda son comparables con las dimensiones del sistema.

### A. Cálculo de los autovalores

En el caso general, para calcular los autovalores debemos encontrar, gráfica o numéricamente, las raíces de la ecuación (22). Sin embargo, en lugar de encontrar los ceros de la ecuación

$$\tan \beta L_1 \tan \beta L_2 - \frac{S_1}{S_2} = 0,$$

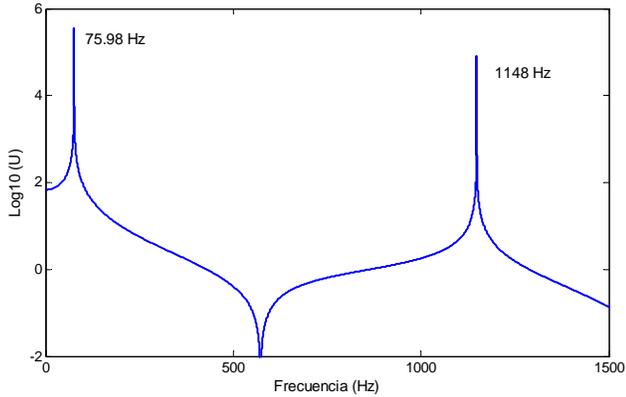
es más conveniente encontrar los máximos de la función

$$U = \frac{1}{|\tan \beta L_1 \tan \beta L_2 - S_1 / S_2| + \varepsilon}, \quad (25)$$

donde  $\varepsilon$  es un número positivo muy pequeño.

En la figura se muestra la gráfica de  $\log_{10}(U)$  en función de  $f = \omega / 2\pi$ , para una botella que tiene las dimensiones,  $L_1 = 0.05m$ ,  $L_2 = 0.15m$ ,  $S_1 = 10^{-4} m^2$  y  $S_2 = 6.8 \times 10^{-3} m^2$ . Se supuso que la velocidad del sonido  $c$  es igual a  $343.5 m/s$  ( $T = 20^\circ C$ ),  $\rho_0 = 1.2 Kg / m^3$  y que  $\varepsilon = 10^{-6}$ . La frecuencia más baja,  $f_H = 75.98 Hz$  es la frecuencia del modo Helmholtz. La frecuencia que se

obtiene a partir de la fórmula de Helmholtz (ecuación (5)) nos da  $f_H = 76.59 \text{ Hz}$ . La diferencia, que es del orden del 1% se debe a la aproximación de  $\tan kL$  por  $kL$ .



**FIGURA 4.**  $\text{Log}_{10}(U)$  en función de las frecuencias. Los picos se encuentran en la frecuencia de los modos normales. En la figura se observa el pico correspondiente al modo Helmholtz (75.98 Hz) y el de un modo de frecuencia más alta (1148 Hz).

El modo Helmholtz tiene una longitud de onda.  $\lambda = c/f \approx 4.5 \text{ m}$  que es mucho mayor que la longitud total del sistema,  $L = L_1 + L_2 = 0.20 \text{ m}$ . Sin embargo, la longitud de onda del segundo modo (0.30 m) es comparable con las dimensiones del sistema.

**B. Análisis de las ondas estacionarias de presión y velocidad**

De la ecuación (20) obtenemos

$$A_2 = A_1 \frac{\sin \beta L_1}{\cos \beta L_2} \tag{26}$$

Como en general  $A_1$  es complejo, hacemos

$$A_1 = |A_1| e^{i\alpha} \tag{27}$$

Para encontrar las ondas estacionarias de presión y velocidad se multiplican las ecuaciones (13) a (16) por  $e^{i\omega t}$ . Considerando (26) y (27) y tomando la parte real se obtiene

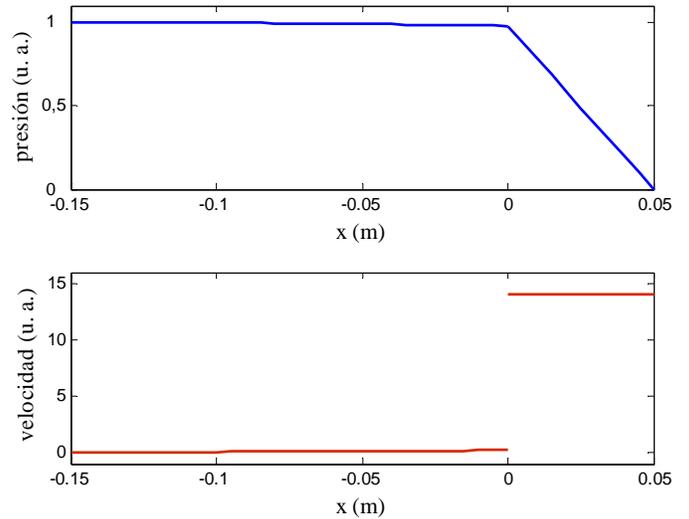
$$p_2(x, t) = p_m \cos \beta(x + L_2) \cos(\omega t + \alpha), \tag{28a}$$

$$v_2(x, t) = \frac{p_m}{Z_0} \sin \beta(x + L_2) \sin(\omega t + \alpha), \tag{28b}$$

$$p_1(x, t) = p_m \frac{\cos \beta L_2}{\sin \beta L_1} \sin \beta(L_1 - x) \cos(\omega t + \alpha), \tag{29a}$$

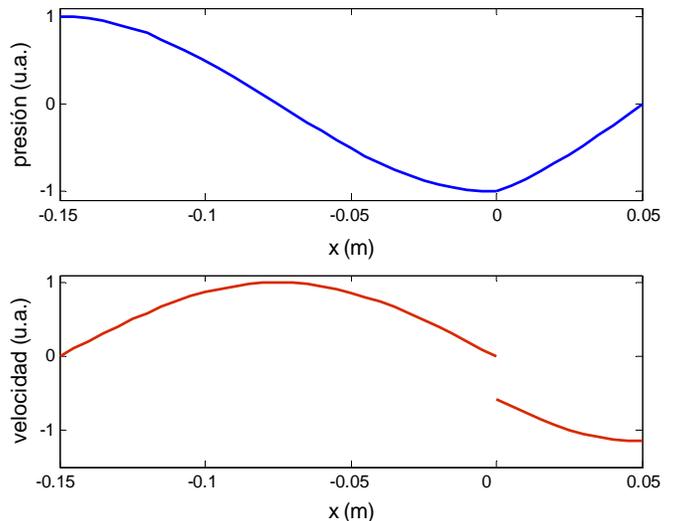
$$v_1(x, t) = \frac{p_m}{Z_0} \frac{\cos \beta L_2}{\sin \beta L_1} \cos \beta(L_1 - x) \sin(\omega t + \alpha), \tag{29b}$$

donde  $p_m = |A_2|$  es la amplitud de la onda de presión en el medio 2.



**FIGURA 5.** Ondas de presión (arriba) y velocidad (abajo), que se calculan con las ecuaciones (28) y (29) para  $k = 2\pi f_H / c$ , donde  $f_H = 75.98 \text{ Hz}$ .

En la Fig. 5 se grafican las ondas de presión y de velocidad (en unidades arbitrarias) en función de  $x$ , para una botella que tiene las dimensiones dadas en el párrafo anterior, cuando está oscilando en su modo Helmholtz. La onda de presión tiene una amplitud casi constante en el interior de la cavidad principal y decrece casi linealmente, en el cuello, hasta tomar el valor cero en su extremo. La velocidad del aire en el cuello es mucho más grande que la velocidad del aire en la cavidad principal. La razón entre estas velocidades es  $S_2 / S_1$  (del orden de 68 para este ejemplo).



**FIGURA 6.** Ondas de presión (arriba) y velocidad (abajo), en el interior de la botella, para el segundo modo cuya autofrecuencia es  $f = 1148 \text{ Hz}$ .

Este comportamiento de las ondas de presión y de velocidad es coherente con el modelo que elaboró Helmholtz para encontrar la frecuencia propia de este modo pues de acuerdo a estas gráficas en la cavidad

principal la energía va a resultar puramente potencial elástica y en el cuello puramente cinética.

En la Fig. 6 se muestran las amplitudes de las ondas de presión y de velocidad, en el interior del tubo, para el segundo modo, cuya autofrecuencia es 1148 Hz. La curvatura que tiene este modo es una evidencia que su longitud de onda es comparable con las dimensiones del sistema. Por el contrario, las gráficas sin curvatura de la Fig. 5 confirman que, para el modo Helmholtz, la longitud de onda es muy grande comparada con las dimensiones del sistema.

## V. CÁLCULO DE LAS ENERGÍAS CINÉTICA Y POTENCIAL DEL MODO HELMHOLTZ

Para el modo Helmholtz,  $\beta L_1 \ll 1$  y  $\beta L_2 \ll 1$ , por lo tanto, podemos hacer las siguientes simplificaciones:  $\cos \beta(x+L_2) \approx 1$ , para cualquier  $x$  en el intervalo  $(-L_2, 0)$ ,  $\sin \beta(x+L_2) \approx \beta(x+L_2)$ , para cualquier  $x$  en el intervalo  $(-L_2, 0)$ ,  $\cos \beta(x+L_1) \approx 1$ , para cualquier  $x$  en el intervalo  $(0, L_1)$ ,  $\sin \beta(x+L_1) \approx \beta(x+L_1)$ , para cualquier  $x$  en el intervalo  $(0, L_1)$  y  $\cos \beta L_2 / \sin \beta L_1 \approx 1 / \beta L_1$  y su frecuencia es la correspondiente al autovalor dado por la ecuación (24).

Utilizando estas aproximaciones, la presión y la velocidad en el volumen principal y en el cuello vienen dadas por:

$$p_2 \approx p_m \cos(\omega_H t + \alpha), \quad (30a)$$

$$v_2 \approx \frac{p_m}{Z_0} h_2 (1 + x/L_2) \sin(\omega_H t + \alpha), \quad (30b)$$

$$p_1 \approx p_m \frac{L_1 - x}{L_1} \cos(\omega_H t + \alpha), \quad (31a)$$

$$v_1 \approx \frac{p_m}{Z_0} \frac{1}{h_1} \sin(\omega_H t + \alpha). \quad (31b)$$

La densidad de energía total  $u$ , en cada una de las regiones, es la suma de la densidad de energía potencial elástica [7]

$$u_p = \frac{p^2}{2Z_0 c}, \quad (32)$$

y la densidad de energía cinética

$$u_c = \frac{1}{2} \rho_0 v^2. \quad (33)$$

De las ecuaciones (30a) y (30b) se deduce que la densidad de energía cinética en el volumen principal  $u_{c2}$  es un infinitésimo de segundo orden con respecto a la densidad

*Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 3, No. 1, Jan. 2009*

de energía potencial  $u_{p2}$ ; esto es,  $u_{c2} \leq h_2^2 u_{p2}$ . En el cuello, sin embargo, la energía potencial elástica es un infinitésimo de segundo orden con respecto a la densidad de energía cinética; esto es,  $u_{p1} \leq h_1^2 u_{c1}$ .

Por lo tanto, si despreciamos los términos de segundo orden en  $h_1$  y  $h_2$ , la densidad de energía es puramente potencial en el volumen principal y puramente cinética en el cuello. En esta aproximación la energía potencial total del sistema  $E_p$  se obtiene integrando la densidad de energía potencial  $u_{p2}$  sobre el volumen principal, lo que da:

$$E_p = E_{pm} \cos^2(\omega_H t + \alpha), \quad (34a)$$

donde  $E_{pm}$  es la energía potencial máxima que viene dada por

$$E_{pm} = \frac{p_m^2 V_2}{2Z_0 c}. \quad (34b)$$

De la misma manera la energía cinética del sistema  $E_c$  se obtiene integrando la densidad de energía cinética  $u_{c1}$  sobre el volumen del cuello, así se tiene:

$$E_c = E_{cm} \sin^2(\omega_H t + \alpha), \quad (35a)$$

donde  $E_{cm}$  es la energía cinética máxima que viene dada por

$$E_{cm} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{p_m^2 (S_1 L_1)}{(\beta L_1)^2 Z_0^2}. \quad (35b)$$

Si en (35b) reemplazamos  $\beta$  por  $\omega_H / c$ , ecuación (24), se puede demostrar que

$$E_{cm} = E_{pm}$$

La energía total del sistema es entonces:

$$E = E_{pm} \cos^2(\omega_H t + \alpha) + E_{cm} \sin^2(\omega_H t + \alpha) = E_{pm} = E_{cm}$$

Esto es, *la energía total del resonador se mantiene constante*. Entonces, hay una transformación permanente de energía cinética en energía potencial y viceversa, del mismo modo que en un oscilador masa – resorte en ausencia de rozamiento.

### A. Cálculo de la constante elástica equivalente de la cavidad principal

Para calcular la constante elástica equivalente de la cavidad principal tenemos que relacionar su energía potencial con la amplitud de desplazamiento de la masa, que designaremos como  $\Phi_{1m}$ .

De la ecuación (31b) obtenemos

$$v_{1m} = \frac{p_m}{Z_0 h_1}, \quad (36a)$$

donde  $v_{1m}$  es la máxima amplitud de la velocidad en el cuello y como  $v = \partial\Phi / \partial t$ , se tiene

$$v_{1m} = \omega_H \Phi_{1m}. \quad (36b)$$

A partir de (36a) y (36b) tenemos:

$$p_m = Z_0 h_1 \omega_H \Phi_{1m}. \quad (37)$$

Reemplazando (37) en (34b) nos queda:

$$E_{pm} = \frac{1}{2} k_{eq} \Phi_{1m}^2, \quad (38)$$

donde  $k_{eq}$ , la constante elástica equivalente de la cavidad, es

$$k_{eq} = B \frac{S_1^2}{V_2}, \quad (39)$$

resultado que coincide con la expresión encontrada en la sección II.

## VI. CONCLUSIONES

Hemos mostrado que, partiendo de la solución analítica de la ecuación de ondas acústica, se puede recuperar la física del modelo utilizado por Helmholtz para encontrar la frecuencia del modo que lleva su nombre. Calcular la frecuencia del modo Helmholtz de esta manera es un poco más laborioso. Sin embargo, la deducción que se obtiene utilizando esta matemática más dura puede generalizarse a otros sistemas físicos. En efecto, las analogías matemáticas basadas en las ecuaciones diferenciales, en muchos casos, son más fructíferas que las analogías basadas en los mecanismos [9]. Existe una gran variedad de fenómenos físicos que se describen por medio de una ecuación de ondas lineal: ondas electromagnéticas, acústicas, ondas mecánicas en medios elásticos, etc. En todos estos casos se puede introducir el concepto de impedancia [7], aún para las ondas cuánticas [10]. En cualquiera de estos fenómenos puede aparecer, por lo tanto, un modo tipo Helmholtz. La condición que se debe cumplir es que se tenga un salto grande en la impedancia de los dos medios y que sus dimensiones sean pequeñas comparada con la longitud de onda asociada. Aunque habitualmente no se lo subraya, el modo de oscilación del sistema clásico masa – resorte es en verdad un modo Helmholtz. Este sistema tiene infinitos modos de frecuencias superiores, que en la práctica se los confunde con los modos normales de un resorte fijo en sus dos extremos, pues el nodo de estos modos está muy próximo a la masa del oscilador. Sin embargo, si la masa es comparable con la masa del resorte, el nodo del segundo modo está separado de la masa y se pueden observar oscilaciones de amplitud relativamente grandes en esta segunda resonancia. Por lo tanto, la analogía de los modos

de una botella con los de un sistema masa – resorte, no se limita sólo a su modo más bajo, o modo Helmholtz, sino también a sus modos de frecuencias superiores.

La utilización de resonadores Helmholtz es cada vez más frecuente en los laboratorios del nivel medio [11] [12] y universitario [13] [14], tanto como un prototipo de un oscilador o como un dispositivo para filtrar sonido en una dada gama de frecuencias, pues son muy fáciles de construir y las mediciones se realizan mediante micrófonos, parlantes y detectores de señales que se encuentran normalmente en los laboratorios de estos establecimientos. Son también muy empleados [15] [16] como amortiguadores de ruido en ductos, vehículos y máquinas o en nuevos dispositivos experimentales [17] para simular el comportamiento de metamateriales. Es por lo tanto un tema relevante para incluirlo en los cursos de vibraciones y ondas o de ecuaciones diferenciales en las carreras de ingeniería y de ciencias físicas.

## REFERENCIAS

- [1] von Helmholtz, H., *On the Sensations of Tone as a Physiological basis of the Theory of Music*, (Dover Publications, New York, 1954).
- [2] Boring, E. G., *Sensation and Perception in the History of Experimental Psychology*, (Appleton–Century, New York, 1942).
- [3] Boyle, R., *New Experiments Physico-Mechanicall, Touching the Spring of the Air and its Effects*, (Oxford, 1660).
- [4] Crawford, F. S., *Lowest modes of a bottle*, Am. J. Phys. **56**, 702 (1988).
- [5] Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound*, (Dover Publications, New York, 1954).
- [6] French, A. P., *Vibration and Waves*, (W.W. Norton, New York, 1971).
- [7] Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. J. and Sanders, J. V., *Fundamentals of Acoustics*, (Wiley, New York, 1982).
- [8] Granger, R. A., *Fluids Mechanics*, (Dover Publications, New York, 1995).
- [9] Pask, C., *Mathematics and the science of analogies*, Am. J. Phys. **71**, 526-534 (2003).
- [9] Khonder, A. N., Rezwan Khan, N., Abwar, A. F. M., *Transmission line analogy of resonance tunneling phenomena: The generalized impedance concept*, J. Appl. Phys. **63**, 5191 - 5193 (1988).
- [11] Silverman, M. P. and Worthy, E. R. *Musical mastery of a Coke bottle: Physical modeling by analogy*, Phys. Teach. **36**, 70–74 (1998).
- [12] Gluck, P., Ben-Sultan, S., Dinur, T., *Resonance in Flasks and Pipes*, Phys. Teach. **44**, 10-15 (2006).
- [13] Guiguet, A., Welti, R., *Supresión de modos de vibración acústicos con un resonador Helmholtz*, Rev. Bras. Ens. Fis. **25**, 287-293 (2003).
- [14] Moloney, M. J., *Quality factors and conductances in Helmholtz resonators*, Am. J. Phys. **72**, 1035–1039 (2004).
- [15] Pierce, A. D., *Acoustics: An Introduction To Its Physical Principles And Applications*, (McGraw-Hill Book Co., New York, 1981).

[16] Cameron, T. y Russell, D., *Laboratory Instruction in Acoustics and Vibration*, (Proceedings of the American Society for Engineering Education, ASSE, Washington D. C., 1996).

[17] Fang, N., Xi, D., Xu, J., Ambati, M., Srituravanich, W., Sun, C., Zhang, X., *Ultrasonic metamaterials with negative modulus*, *Nature Materials* **5**, 452 – 456, (2006).