UTN FACULTAD REGIONAL HAEDO.

LABORATORIO DE FISICA

EL PÉNDULO QUE OSCILA CON GRANDES AMPLITUDES

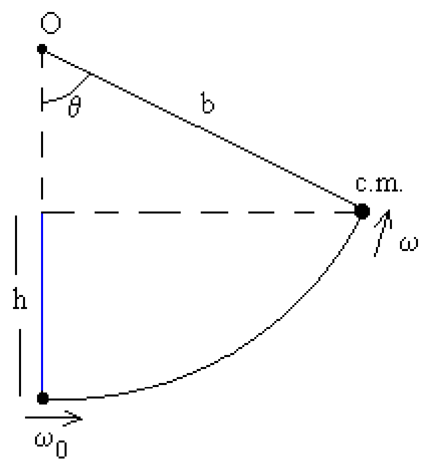
Nota: Continuación del primer documento***" Complemento al TP de Laboratorio de Fìsica 1 :Péndulo"***

Supongamos que el péndulo está en reposo y le aplicamos energía a través de un impulso que le proporciona una velocidad de rotación ω_0 en su punto inferior.

La energía cinética inicial se va convirtiendo en energía potencial hasta alcanzar un ángulo θ_0 donde la velocidad angular **ω=0**.

A partir de ese momento el péndulo vuelve a retroceder perdiendo energía potencial y ganando cinética pasando nuevamente por el punto inicial (el más bajo) donde ahora la velocidad angular valdrá **-$\boldsymbol{\omega_0}$** ,y sigue ascendiendo en sentido inverso hasta llegar a su otro máximo en el ángulo -θ_0 donde nuevamente la velocidad angular **ω=0**.

Finalmente vuelve a retroceder al punto inicial inferior de donde partió completando el ciclo



El principio de conservación de la energía mecánica, establece que la suma de la energía potencial +la energía cinética, en cualquier punto de la trayectoria de péndulo es una constante.

Por otro lado la energía potencial que se da para el ángulo intermedio **θ** con su altura asociada h valdrá:

$E_p = m * g * h = m * g * (b - bcos\theta)$=m*g*b*$(1 - cos\theta)$.Donde b es la distancia entre el CM (centro de masa) y el punto de sujeción "O" del péndulo en torno al cual oscila a través de su eje.

En ese punto intermedio de la trayectoria la velocidad angular tendrá también un valor intermedio ω y la energía mecánica (constante vale:

$\boldsymbol{E_m} = \frac{1}{2}$*$\boldsymbol{I^0} * \boldsymbol{\omega^2}$**+ m*g*b***$(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\theta})$**= cte .**

Esta ecuación también la podemos escribir

$\frac{1}{2}$*$\boldsymbol{I^0} * \left(\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2$**+ m*g*b***$(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\theta})$**=cte (1)**

Al llegar al punto superior donde ω=0 y el ángulo es θ_0 la energía mecánica (constante), valdrá.

$\boldsymbol{E_m} =$ **m*g*b***$(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\theta_0})$**= cte .**

Entonces la (1) se puede escribir:

m*g*b*$(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\theta_0})$=$\frac{1}{2}$*$\boldsymbol{I^0} * \left(\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}}\right)^2$**+ m*g*b***$(\mathbf{1} - \boldsymbol{cos\theta})$

Operando

m*g*b – m*g*b*cosθ_0=$\frac{1}{2}$*$I^0 * \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$+m*g*b - m*g*b*cosθ

m*g*b$(cos\theta - cos\theta_0)$= $\frac{1}{2}$*$I^0 * \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

2*m*g*b$(cos\theta - cos\theta_0)$= $I^0 * \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

$\frac{2*\mathrm{m}*\mathrm{g}*\mathrm{b}}{I^0}$*$(cos\theta - cos\theta_0)$=$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ (2)

Ahora recordemos una de las igualdades trigonométricas fundamentales

$$cos(\alpha + ß) = cos\alpha * cosß - sen\alpha * senß$$

Si α=ß=θ tendremos

$cos2\theta = (cos\theta)^2$-$(sen\theta)^2$ y obviamente

$cos\theta = \left(cos\frac{\theta}{2}\right)^2$-$\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2$ También conocemos la relación Pitagórica

$\left(cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - \left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2$

$cos\theta =$ 1- 2 $\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2$ Por lo tanto también será por analogía

$cos\theta_0 =$ 1-2 $\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2$

Reemplazando en la (2)

$$\frac{2*\mathrm{m}*\mathrm{g}*\mathrm{b}}{I^0}*\left(1-\left(2*sen\frac{\theta}{2}\right)^2-1+\left(2*sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{4*\mathrm{m}*\mathrm{g}*\mathrm{b}}{I^0}*\left(\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$d\theta^2=\frac{4*\mathrm{m}*\mathrm{g}*\mathrm{b}}{I^0}*\left(\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2\right)*dt^2$$

$$d\theta=2*\sqrt{\frac{m*g*b}{I^0}}*\sqrt{\left(\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2\right)}*\mathrm{dt}$$

$$dt=\sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}}*\frac{\frac{d\theta}{2}}{\sqrt{\left(\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2\right)}} \qquad (3)$$

Ahora puedo designar arbitrariamente a:

$$sen\text{Ø}=\frac{sen\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta_0}{2}}$$

Pero el ángulo del denominador es conocido porque es la mitad del ángulo inicial elegido,por lo que el denominador es una constante

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{sen\frac{\theta_0}{2}}$$

Luego será $\quad sen\frac{\theta}{2}=k*\ sen\text{Ø}$

y por definición si queremos despejar el valor del ángulo en la última expresión operamos con la función inversa

$$\frac{\theta}{2}=arc\,sen(k*\ sen\text{Ø})$$

Derivemos ambos miembros respecto de Ø

$$\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{d\text{Ø}}=\frac{d\left(arc\,sen(k*\ sen\text{Ø})\right)}{d\text{Ø}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(\theta)}{d\text{Ø}}=\frac{d\left(arc\,sen(k*sen\text{Ø})\right)}{d\text{Ø}} \qquad (4)$$

Como la derivada del segundo miembro no es uso habitual, recurrimos a las tablas de integrales donde encontramos la solución genérica para la derivada del arc sen:

$$\frac{d(arc\ sen\, u)}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

Con un simple cambio de variables vemos que $u = k * \ sen\emptyset$ .Por lo tanto

$$u^2 = k^2 * (sen\emptyset)^2$$

Podemos operar en la (4) cambiando las variables y escribiendo la solución de la derivada del arco seno

$$\frac{1}{2}\frac{d(\theta)}{d\emptyset} = \frac{d\big(arc\ sen(k* \, sen\emptyset\,)\big)}{d\emptyset} = \frac{k*cos\emptyset}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} =$$

Por lo que

$$\frac{1}{2}d\theta = \frac{k*cos\emptyset}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} * d\emptyset \qquad (5)$$

Ahora volvamos a la (3) donde reemplazamos a $\frac{1}{2}d\theta$ por su equivalente de la (5)

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}} * \frac{\frac{k*cos\emptyset}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}}*d\emptyset}{\sqrt{\left(\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\frac{\theta}{2}\right)^2\right)}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}} * \frac{1}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} \frac{k*cos\emptyset*d\emptyset}{\sqrt{\left(\left(sen\,\frac{\theta_0}{2}\right)^2-\left(sen\,\frac{\theta}{2}\right)^2\right)}}$$

Pero de acuerdo con las equivalencias propuestas en párrafos anteriores escribimos

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}} * \frac{1}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} \frac{k*cos\emptyset*d\emptyset}{\sqrt{\left((k)^2-\left(k*\ sen\emptyset\,\right)^2\right)}}$$

Sacamos a k fuera de una de las raíces del denominador y la simplificamos con la K del numerador

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}} * \frac{1}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} \frac{cos\emptyset*d\emptyset}{\sqrt{\left(1-\left(\,sen\emptyset\,\right)^2\right)}}$$

Pero por la simplificación anterior dentro de la misma raíz queda la relación Pitagórica entre seno y coseno que reemplazamos

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m * g * b}} * \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 * (sen\emptyset)^2}} \frac{cos\emptyset * d\emptyset}{\sqrt{(cos\emptyset)^2}}$$

Obviamente podemos simplificar este factor que está en el numerador y denominador

$$dt = \sqrt{\frac{I^0}{m * g * b}} * \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 * (sen\emptyset)^2}} \, d\emptyset$$

Si deseamos integrar la expresión anterior tenemos

$$t = \sqrt{\frac{I^0}{m * g * b}} * \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 * (sen\emptyset)^2}} \, d\emptyset$$

Observamos que la raíz fuera de la integral está relacionada con la definición del periodo del péndulo de pequeñas amplitudes que como sabemos se expresa:

$T_0 = 2\pi * \sqrt{\frac{I^0}{m*g*b}}$ lo cual nos permite escribir

$$t = \frac{T_0}{2\pi} * \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 * (sen\emptyset)^2}} \, d\emptyset$$

Ahora bien, si el ángulo θ_0 al que llega el péndulo como máximo es $\frac{\pi}{2}$ el tiempo **t** será **l**a cuarta parte del periodo

Tomando $\boldsymbol{\frac{T}{4} = \frac{T_0}{2\pi} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} \, d\emptyset}$

Por lo tanto el periodo **T** vale

$$\boldsymbol{T = \frac{2T_0}{\pi} * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2*(sen\emptyset)^2}} \, d\emptyset} \qquad (6)$$

Esta integral se llama integral elíptica de primera especie que no tiene solución directa, ni haciendo cambio de variables, ni integrando por partes.

Para resolver estas integrales se reemplaza al integrando por un desarrollo en serie de Taylor. Es decir tomando solo el integrando como una función podemos escribir:

$$f_{(\boldsymbol{sen}\emptyset)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - k^2} * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^{\boldsymbol{2}}}}$$

Que podemos reducir a la forma

$f_{(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1-x}}}$ si hacemos el reemplazo $\boldsymbol{x = k^2 * (sen\text{Ø})^2}$ **(7)**

Taylor define una serie de varios términos sucesivos y sumados para aproximar el valor de una función en un punto ubicado en el entorno de otro punto llamado "a" donde el valor de la función se conoce.

Taylor lo define así:

$$f_{(x)} = a_0 + a_1(\boldsymbol{x-a}) + \boldsymbol{a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4} + \cdots.$$

Donde cada una de las constantes se define como

$$a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

El numerador es por ejemplo la derivada tercera de la $f_{(x)}$ definida en el punto "a" para el término 3ro y la derivada enésima de la $f_{(x)}$ definida en el punto "a", para el término "n".

Por su parte el denominador es el factorial del mismo orden que el término, es decir por ejemplo factorial tres para el término 3ro y factorial enésimo para el término" n".

Para que el desarrollo de Taylor tenga validez, hay que cerciorarse de que la función sea continua y derivable hasta el orden enésimo en el punto "a" elegido.

Pero nuestra función $f_{(x)}$ contiene un seno que vale entre cero y uno y que al elevarse a potencias cada vez mayores su resultado tenderá a cero para los términos superiores de la serie.

No podemos estudiar la serie en el entorno de a = 1 porque la función no está definida, pero si la podemos estudiar en el entorno de a = 0.

Cuando el punto de referencia "a" es igual a cero la serie pasa a llamarse SERIE de Mac Laurin. Es decir

$$f_{(x)} = a_0 + a_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + a_4(x)^4} + \cdots. \qquad \textbf{(8)}$$

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

Ahora si hagamos el desarrollo en serie:

Siendo $f_{(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1-x}}}$ **=**$\boldsymbol{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}$

Será:

$$a_0 = \frac{f^0(0)}{0!} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1-0}}}}{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1$$

$$a_1 = \frac{f^1(0)}{1!} = -\frac{1}{2} * \frac{(\mathbf{1-0})^{-\frac{3}{2}} * (-\mathbf{1})}{1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$a_2 = \frac{f^2(0)}{2!} = -\frac{1}{2} * \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{(\mathbf{1-0})^{-\frac{5}{2}} * (-\mathbf{1})}{1 * 2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$$

$$a_3 = \frac{f^3(0)}{3!} = -\frac{1}{2} * \left(-\frac{3}{2}\right) * \left(-\frac{5}{2}\right) \frac{(\mathbf{1-0})^{-\frac{7}{2}} * (-\mathbf{1})}{1 * 2 * 3} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{48}}$$

Etc….. podríamos seguir con términos superiores ,pero cada vez son más pequeños y aportan poco al redondeo del resultado.

Entonces la serie (8) será:

$$f_{(x)} = 1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}(\boldsymbol{x})^{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{48}}(\boldsymbol{x})^{\mathbf{3}} + \cdots.$$

Volvamos a la equivalencia (7) para adaptar la serie a nuestro caso

$$f_{(sen\emptyset)} = 1 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}} * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^{\mathbf{2}}) + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}(\boldsymbol{k}^{\mathbf{4}} * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^{\mathbf{4}}) + \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{48}}(\boldsymbol{k}^{\mathbf{6}} * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^{\mathbf{6}}) + \cdots.$$

Ahora podemos volver a la expresión (6) y reemplazar como dijimos al integrando por este desarrollo en serie (la volvemos a escribir y luego reemplazamos)

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{T_0}}{\boldsymbol{\pi}} * \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{k}^{\mathbf{2}}*(\boldsymbol{sen}\emptyset)^{\mathbf{2}}}}\, \boldsymbol{d}\emptyset \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{T_0}}{\boldsymbol{\pi}} * \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{k}^2 * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^2\right) + \frac{3}{8}\left(\boldsymbol{k}^4 * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^4\right) + \frac{15}{48}\left(\boldsymbol{k}^6 * (\boldsymbol{sen}\emptyset)^6\right) + \cdots\right] \boldsymbol{d}\emptyset \qquad (9)$$

Debemos integrar cada uno de los términos de la serie por separado y reemplazar su resultado en la expresión (9)

El primer término es muy simple de resolver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * d\,\emptyset = \emptyset\left(\boldsymbol{entre\ 0\ y\ \frac{\pi}{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \quad \textbf{(10)}$$

El segundo término de la (9) es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(k^2 * (sen\emptyset)^2)d\ \ \emptyset = \frac{1}{2} * k^2 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\emptyset)^2 * d\emptyset$$

Para resolver la integral de la función seno al cuadrado recurrimos a una de las expresiones universales usadas en trigonometría que relaciona un ángulo con su ángulo doble. Ella es :

$cos2\emptyset = (cos\emptyset)^2$-$(sen\emptyset)^2$ e insertando la relación pitagórica

$cos2\emptyset = 1 - (sen\emptyset)^2$-$(sen\emptyset)^2$=1-2*$(sen\emptyset)^2$ y despejando el cuadrado del seno

$$(sen\emptyset)^2 = \frac{1 - cos2\emptyset}{2}$$

Que introducimos ahora en la última expresión

$$\frac{1}{2} * k^2 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\emptyset)^2 * d\emptyset = \frac{1}{2} * k^2 * \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - cos2\emptyset}{2} * d\emptyset$$

$$\frac{1}{2} * k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\emptyset - \frac{1}{2} * k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos2\emptyset}{2} * d\emptyset = \left(\frac{1}{4} * k^2 * \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} * k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\emptyset * d\emptyset$$

La última integral la resolvemos con un cambio de variable

Hacemos $2\emptyset = z$

Entonces $\dfrac{dz}{d\emptyset} = 2$ y Reemplazamos también los límites de la última integral, Es decir

si $\emptyset = \frac{\pi}{2}$ Z = π

la integral del segundo término de la (9)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(k^2 * (sen\emptyset)^2)d\ \ \emptyset = \left(\frac{\pi}{8} * k^2\right) - \frac{1}{4} * k^2 \int_0^{\pi} cosz * \frac{dz}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(k^2 * (sen\emptyset)^2)d\ \ \emptyset = \left(\frac{\pi}{8} * k^2\right) - \frac{1}{8} * k^2 \int_0^{\pi} cosz * dz$$

Donde la última integral es directa y nula porque implica evaluar el valor del sen z entre 0 y π.Por lo tanto el resultado de integrar el segundo término de la(9) es

$$\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{8} * k^2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2} * k^2 * \frac{\pi}{4}} \quad (11)$$

Ahora integremos el tercer término de la 9

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8} k^4 * (sen\emptyset)^4 d\emptyset = \frac{3}{8} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\emptyset)^4 d\emptyset$$

Volvemos a la expresión trigonométrica que vincula el seno y coseno de un ángulo con su ángulo doble

$cos2\emptyset = (cos\emptyset)^2$-$(sen\emptyset)^2$

$$(sen\emptyset)^2 = \frac{1 - cos2\emptyset}{2}$$

Por lo tanto

$$(sen\emptyset)^4 = \frac{(1 - cos2\emptyset)^2}{4}$$

Operando el cuadrado del binomio:

$$(sen\emptyset)^4 = \frac{(1 - 2 * cos2\emptyset + (cos2\emptyset\ )^2)}{4}$$

Por lo tanto la última integral se puede escribir:

$\frac{3}{32} k^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2 * cos2\emptyset + (cos2\emptyset\ )^2) d\emptyset = \frac{3}{32} k^4 * \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 * d\emptyset - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2\emptyset d\emptyset\right] +$
$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos2\emptyset)^2\, d\emptyset$

Resolvamos término a término. El primero es nuevamente una integral directa.

El segundo se resuelve por sustitución de variables .Lo hacemos directamente y analizamos el tercer término

$$\frac{3}{32} k^4 * \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{2} * sen(\pi - 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos2\emptyset)^2\, d\emptyset\right]$$

Ya observamos que el segundo término es nulo

Para la tercera integral recurrimos nuevamente a la misma relación trigonométrica que las funciones de seno y coseno con su ángulo doble

$cos2\emptyset = (cos\emptyset)^2$-$(sen\emptyset)^2$ luego

$cos4\emptyset = (cos2\emptyset)^2$-$(sen2\emptyset)^2$

$cos4\emptyset = (cos2\emptyset)^2$-$(1 - cos2\emptyset)^2$

$cos4\emptyset = 2 * (cos2\emptyset)^2$-1

$$\frac{1 + cos4\emptyset}{2} = (cos2\emptyset)^2$$

Ahora puedo resolver la tercera integral haciendo un cambio de variables. Pero antes escribamos previamente hasta aquí como nos queda toda la expresión anterior .

$$\frac{3}{32}k^4 * \left[\frac{\pi}{2} + 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos4Ø}{2} dØ\right]$$

Ahora si hacemos cambio de variables llamando por ejemplo

$$4Ø = x$$

$\frac{dx}{dØ} = 4$ luego $dØ = \frac{dx}{4}$.Cambio también los límites de la integral ya que si

Ø=$\frac{\pi}{2}$;   x=2π. Reemplazando

$$\frac{3}{32}k^4 * \left[\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} * dØ + \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} cosx\, dx\right]$$

Pero obviamente la tercera integral es nula porque el seno y el coseno en un ciclo completo al remplazar los límites dan cero.

Finalmente el tercer término buscado del expresión (9) vale

$\frac{3}{32}k^4 * \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{3}{32}k^4 * \frac{3}{4}\pi$= $\left[\frac{3}{8}k^4 * \frac{3}{16}\pi\right]$

Volviendo a la (9) reemplazamos en ella cada uno de sus términos entre corchetes por cada uno de loa tres últimos resultados obtenido por el desarrollo de las respectivas integrales. Es decir copiando nuevamente la (9) para clarificar y reemplazando en ella

llegamos a :

$$\boldsymbol{T = \frac{2T_0}{\pi} * \int_0^{\frac{\pi}{2}}} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{k^2} * (\boldsymbol{sen}Ø)^2\right) + \frac{3}{8}\left(\boldsymbol{k^4} * (\boldsymbol{sen}Ø)^4\right) + \frac{15}{48}\left(\boldsymbol{k^6} * (\boldsymbol{sen}Ø)^6\right) + \cdots\right] \boldsymbol{dØ} \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{T = \frac{2T_0}{\pi}} * \left[\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} + \boldsymbol{\frac{1}{2}} * \boldsymbol{k^2} * \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{8}k^4 * \frac{3}{16}\pi + \cdots\right]$$

Pero al iniciar el desarrollo habíamos designado   a

$$\boldsymbol{k = sen\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$$

Por lo que nuestra última expresión queda

$$T = \frac{2T_0}{\pi} * \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} * \left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2 * \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^4 * \frac{3}{16}\pi + \cdots\right]$$

Podemos por último sacar factor común $\frac{\pi}{2}$ del corchete para simplificarlo con $\frac{2}{\pi}$ que está fuera de él.

La expresión del periodo para el péndulo de grandes amplitudes se expresa entonces como

$$T = T_0 * \left[1 + \frac{1}{4} * \left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{9}{64}\left(sen\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \cdots\right]$$

Conclusión:

El periodo del péndulo de grandes amplitudes se expresa como el periodo del péndulo simple “T_0",afectado por un factor de corrección .Ese factor de corrección es tanto mayor a 1 cuanto mayor sea la amplitud del ángulo inicial seleccionado, como lo veremos graficando en excel la expresión del periodo para distintas amplitudes de oscilación .

Finalmente comprobaremos con el soft CAPSTONE desde pequeñas a grandes amplitudes de oscilación que los periodos calculados teóricamente, coinciden con los experimentales de laboratorio.

Para ello presentamos en archivos adjuntos la siguiente documentación complementaria:

1º) Tabla Excel activa para que se pueda trabajar sobre ella agregando o modificando valores para hallar el periodo del péndulo físico en un amplio espectro de amplitudes de oscilación

2º) una foto de la mesada del laboratorio donde se pueden apreciar el péndulo mencionado en el primer documento de péndulo simple fabricado a partir de una varilla de construcción (L=1,2m y Ø=6mm).

También se observa el montaje de otro péndulo físico de forma arbitraria muy liviano, vinculado al sensor de rotación PASCO CI 6538

3º) La verificación del cálculo teórico del periodo para el periodo péndulo simple se hizo vinculando la varilla al soft CAPSTONE mediante:

Fotopuerta PASCO ME 9498 A; conectando dicha fotopuerta al adaptador digital PASCO PS 2159, conectado a su vez a un puerto de la interface SPARK LINK PS 2011,y esta finalmente a la PC y apretando unos tres segundos el micropulsador que habilita el Bluetooth;(parpadeo azul del led).

Comprobada con el CAPSTONE la configuración de hardware, seleccionamos la opción periodo del péndulo y se elige una plantilla clásica para graficar .

Se adjunta el archivo de comprobación que da el CAPSTONE en este caso.

4º) Con el péndulo liviano (acrílico delgado) de forma arbitraria, vinculado como mencionamos al sensor de rotación, y comprobado el hardware con el CAPSTONE, elegimos sobre una plantilla clásica el gráfico del ángulo **"θ"** de oscilación.

Luego pedimos la ecuación correspondiente sobre el ícono que permite seleccionar funciones. Obviamente elegimos la función senoidal que se adapta perfectamente al muestreo de puntos graficados por el CAPSTONE.

Se adjunta el archivo CAPSTONE para :

Angulo pequeño de oscilación y dos ángulos de gran amplitud elegidos al azar de 80º y 90º.

Se observa la coincidencia de valores para el periodo calculado (que mostramos a continuación), a partir del valor de "ω"(velocidad angular);que muestra la función senoidal, en el archivo del Capstone ;con la indicada en la tabla Excel de cálculos teóricos.

a) Para el ángulo de oscilación de baja amplitud el valor de la velocidad angular según el Capstone es $\boldsymbol{\omega_0 = 6,68\,\frac{1}{seg}}$ y como $\boldsymbol{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$ resulta:

$$T_0 = \frac{2\pi}{6{,}68}\text{ seg} = 0{,}94\text{seg}$$

b) Para el ángulo de oscilación de 80º, el valor de la velocidad angular según el Capstone es $\boldsymbol{\omega_1 = 5,89\,\frac{1}{seg}}$ y como $\boldsymbol{\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}}$ resulta:

$$T_1 = \frac{2\pi}{5{,}89}\text{ seg} = 1{,}066\text{ seg},$$ comprobado en la tabla Excel.

c) Para el ángulo de oscilación de 90º, el valor de la velocidad angular según el Capstone es $\boldsymbol{\omega_2 = 5,74\,\frac{1}{seg}}$ y como $\boldsymbol{\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}}$ resulta:

$$T_2 = \frac{2\pi}{5{,}74}\text{ seg} = 1{,}094\text{ seg},$$ comprobado en la tabla Excel.

Finalmente veamos los archivos mencionados de apoyo y comprobación

Agustin Zabaljauregui