UTN FAC REG HAEDO

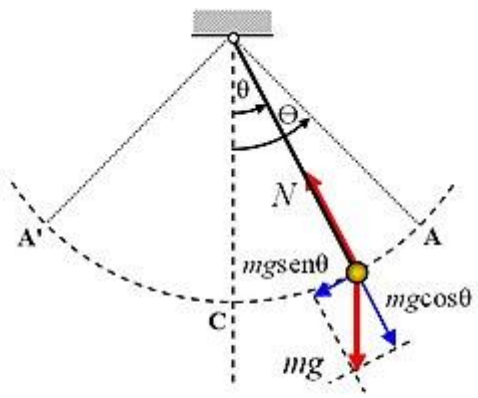
COMPLEMENTO A TP: PENDULO-FISICA 1 Año 2023

Objetivo:

a) **Observar el comportamiento de un péndulo físico conformado por una varilla (hierro de construcción) de diámetro 6 mm y 1,2metros de longitud ,al que se le practicó un pequeño orificio transversal en un extremo para suspenderlo de un soporte**
b) **Calcular la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo periodo de oscilación que el péndulo físico del punto "a".**
c) **Conclusiones**

DESARROLLO

Partimos de una imagen de péndulo clásico que es válida tanto para el péndulo simple como para el péndulo fìsico



Si apartamos al péndulo de su posición de reposo un cierto ángulo pequeño **θ** y lo soltamos actuará la fuerza recuperadora mgsenθ tratando de restablecerlo a su posición original de reposo (sobre el eje vertical).

Aplicaremos entonces tanto para el péndulo simple como para el péndulo físico la expresión fundamental del cuerpo rígido en rotación.

$$\bar{M}_{Fext} = I^{º} * \bar{\gamma}$$

Donde $I^{º}$ es el momento de inercia del péndulo respecto al punto superior de suspensión "O"

$\bar{\gamma}$ es la aceleración angular del movimiento.

$\overline{M}_{Fext}$ es el momento de las fuerzas exteriores dado por el producto de la fuerza de recuperación **mgsenθ** por la distancia **L** (longitud del hilo del péndulo simple que va desde la masa "m" hasta el punto de suspensión "O") o bien **L/2** para el péndulo físico (distancia entre el centro de masa de la varillo hasta el mismo punto de suspensión "O".

Veamos la aplicación de la expresión anterior en ambos péndulos que nos conduce a sus respectivas ecuaciones diferenciales de donde surge la expresión de su pulsación **"ω"** como se enseña en las clases teóricas y a partir de ella calcular el valor de su respectivo periodo de oscilación **"T".**

Escribimos para ambos péndulos:

$$-\boldsymbol{mgsen\theta} * \boldsymbol{L} = \boldsymbol{I^0} * \overline{\Upsilon}$$

Nota:el signo menos surge de que tomamos como mencionamos la fuerza de recuperación y no la contraria inicial que lo apartó del equilibrio.

Pasando el Momento al segundo miembro tenemos:

$$\boldsymbol{I^0} * \overline{\Upsilon} + \boldsymbol{mgsen\theta} * \boldsymbol{L} = \boldsymbol{0}$$

Ahora imponemos la condición de que el ángulo θ sea pequeño para que sea válido el reemplazo de senθ por θ .

Además como sabemos escribimos a ϒ por su equivalente $\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2}}$

Entonces:

$$\boldsymbol{I^0} * \boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2}} + \boldsymbol{mg} * \boldsymbol{L} * \boldsymbol{\theta}$$

Dividiendo todo por I^0 nos queda la ecuación diferencial de segundo grado

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2}} + \boldsymbol{\frac{mg*L*\theta}{I^0}} = 0$$

La solución de esa ecuación diferencial es de tipo armónico, donde la pulsación natural **"$\boldsymbol{\omega_0}$"** surge del segundo término como:

$$\boldsymbol{\omega_0}^2 = \boldsymbol{\frac{mg*L}{I^0}}$$

Expresión general ligada a la pulsación natural, tanto del péndulo simple como del péndulo físico que oscilen con pequeña amplitud.

Veamos las características particulares de cada uno de ellos

PÉNDULO SIMPLE:

Se presenta como una masa “m” concentrada en su extremo como se observa en la figura pendiente de un hilo de longitud “L”que va desde el centro de masa hasta el punto de sujeción del hilo “O”.

Por lo tanto el momento de inercia de esa masa respecto al punto de sujeción “O” (o centro de oscilación) valdrá:

$$I^0 = m * L^2$$

Reemplazando en la expresión general de la pulsación tenemos para el péndulo simple:

$${\omega_0}^2 = \frac{m * g * L}{m * L^2}$$

De donde $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Pero $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

De donde despejamos el periodo “T” para el péndulo simple

$$\boldsymbol{T = 2\pi * \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

PÉNDULO FÍSICO:

Tenemos que retomar la expresión general de la pulsación, pero considerar las características particulares de nuestro péndulo que puede tener innumerables formas.

Entonces la distancia desde su centro de masa hasta el punto “O” de oscilación: será en general una distancia “d” a definir y el momento de inercia respecto al punto de oscilación será distinto para cada forma diferente que tenga el péndulo o como dice el Profesor Vega:” depende de su geometría”.

Y tiene razón ,porque la Geometría es el Estudio de las Formas.

Ahora volvamos al laboratorio.

Alli podemos contar con:

1.Un péndulo físico formado como dijimos al inicio por una varilla de construcción que estudiamos con una barrera óptica (la misma que usamos en cinemática) y el soft Capstone.

2.Un péndulo de geometría amorfa (tiene ex profeso)una forma cualquiera. Lo podemos estudiar con un sensor especial para rotaciones y el soft Capstone.

3.Un péndulo ideal (un hilo con una masa en su extremo)

Acá en este documento veremos el ideal y a continuación el de la varilla cilíndrica.

En ingeniería de todas las formas que pueda tener un cuerpo nos interesan estudiar en profundidad los cilindros; los conos (o su variante el tronco de cono) y las esferas.Esto es debido a todas las aplicaciones que tienen en la vida cotidiana. Pensemos en las ruedas, los rodamientos; los rodillos de las cintas transportadoras,etc…

Entonces a los cuerpos les tenemos que asociar ya no un solo eje de rotación posible sino tres que conocemos como la terna :X;Y;Z.

Al hablar de los tres ejes surge el "tensor de inercia"conformado por una matriz de tercer orden, relacionada precisamente con las tres direcciones: X ; Y : Z

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I_{xx}} & \boldsymbol{I_{xy}} & \boldsymbol{I_{xz}} \\ \boldsymbol{I_{yx}} & \boldsymbol{I_{yy}} & \boldsymbol{I_{yz}} \\ \boldsymbol{I_{zx}} & \boldsymbol{I_{zy}} & \boldsymbol{I_{zz}} \end{vmatrix}$$

Contamos con un documento donde explicamos como obtener cada componente de esa matriz o tensor de inercia .

Pero a los ingenieros nos preocupa que esa matriz tenga forma de matriz diagonalizada es decir con números solo en du diagonal principal .La llamamos ***tensor principal de inercia ,***porque se puede demostrar que cuando aparecen componentes fuera de la diagonal principal el vector pulsación "ω" no tiene la misma dirección que el vector momento cinético "L". Esto se manifiesta en vibraciones sobre máquinas o estructuras que debemos corregir para evitar roturas o en algunos casos siniestros.

Es decimos para nuestro cuerpo en estudio su tensor principal de inercia será:

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{I_{xx}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_{yy}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I_{zz}} \end{vmatrix}$$

Dicho esto y del mismo documento mencionado tomamos el tensor principal de inercia de un cilindro habida cuenta que estudiamos un péndulo físico conformado por una varilla cilíndrica .Nota: (allí se demuestra como se obtiene)

Sabemos que en las clases de Fìsica se analiza en particular el momento de inercia de un cilindro referido a su eje longitudinal que si lo designamos "Z" tiene un valor muy conocido $:\frac{\boldsymbol{M*R^2}}{\boldsymbol{2}}$

Pero en el laboratorio suspendemos la varilla cilíndrica de un eje X ó Y contenido sobre el plano perpendicular al eje longitudinal "Z ".De alli que tomemos indistintamente el momento de inercia $\boldsymbol{I_{xx}}$ ***o*** $\boldsymbol{I_{yy}}$ ya que son iguales por tratarse de una circunferencia.

Para el cilindro dicho tensor principal es:

$$
I = \begin{vmatrix} \left(\frac{M*R^2}{4}+\frac{M*L^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{M*R^2}{4}+\frac{M*L^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{M*R^2}{2}\right) \end{vmatrix}
$$

Estas componentes están referidas a una terna de ejes que pasan por el CM del cilindro

Además para aplicar la expresión general de la pulsación ω nuestra distancia entre el "CM" y el punto "O" será para la varilla = $\frac{L}{2}$ **.**

Entonces además de los valores anteriores debemos aplicar STEINER porque nuestro péndulo no oscila entorno al CM.

Ahora si escribimos:

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{M*g*\frac{L}{2}}{\left(\frac{M*R^2}{4}+\frac{M*L^2}{12}+\frac{M*L^2}{4}\right)}}
$$

Pero el radio R de la varilla como dijimos al principio es de 3mm y su longitud L=1,2 mts lo que permite despreciar el primer término del denominador

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{M*g*\frac{L}{2}}{\left(\frac{4*M*L^2}{12}\right)}}
$$

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\left(\frac{2*L}{3}\right)}}
$$

Finalmente será

$$
T = 2*\pi*\sqrt{\frac{2L}{3g}}
$$

Periodo de nuestra varilla oscilando como péndulo físico en el laboratorio

Algunas Conclusiones:

El periodo T no depende de la masa; no depende de su material ni de su densidad; pero si de la geometría del cuerpo.

No es lo mismo una masa que cuelga de un hilo; que un disco que oscila o una chapa rectangular o de cualquier forma o un cilindro; un cono, una esfera, etc…

Los alumnos podrán calcular la longitud del péndulo ideal que oscile con el mismo periodo que la varilla y verificarlo con el Capstone.

También quiero mencionar el trabajo de investigación que está haciendo un grupo de alumnos dirigidos por los profesores Hugo Mastricola y Maximiliano Dévoli del cual soy humilde colaborador, porque allí se tomarán mediciones en distintas condiciones del péndulo para usar en un futuro cercano conceptos estadísticos como los vistos en el TP Nº1 de Errores en las Mediciones y donde trataremos de incorporar experiencias con apartamientos angulares superiores (no pequeños) que como mencionamos modifican la ecuación diferencial inicial .

Agustín Zabaljauregui