

SÓLIDO RÍGIDO en ROTACIÓN.TENSOR de INERCIA: Significado físico y aplicaciones

PARTE 1: INTRODUCCIÓN.DEFINICIONES.EJES PRINCIPALES de INERCIA

Cuando estudiamos el movimiento de un cuerpo rígido por la acción de fuerzas actuantes, tenemos que considerar que no depende solo de su masa sino también de la distribución espacial de ella dentro de su contorno superficial.

Dicho de otra manera, si dos cuerpos rígidos tienen igual masa, forma ,tamaño y son del mismo material ,pero con distinta configuración del mismo dentro del cuerpo (por ej partículas más concentradas en un punto que otro),en general no se comportarán de la misma manera, bajo la acción de un mismo sistema de fuerzas actuante.

El tensor de inercia que buscamos ,hará que las ecuaciones del movimiento contemplen la distribución de masa en el interior del mismo, mediante un conjunto de 9 (nueve) cantidades, definidas con respecto a la terna solidaria al cuerpo que habitualmente usamos de referencia para estudiar sus movimientos.

Esas 9 cantidades se expresan como momentos de segundo orden con respecto a dicha terna.

Este concepto fue introducido por L.Euler (1707-1783), físico - matemático suizo quien publicó su “TEORÍA del “MOVIMIENTO del CUERPO SÓLIDO” aproximadamente un siglo después de que Newton expusiera los principios fundamentales de la Física clásica. De alguna manera se complementaron.

Euler introduce los conceptos de Centro de Inercia, momentos de inercia y ejes principales de inercia.

Antes de comenzar con el análisis de estos conceptos con muchas aplicaciones en el campo de la ingeniería, vamos a retomar algunos temas básicos de Física, que nos ayudarán a incorporar los nuevos aspectos. Recordamos los conceptos y luego dibujamos algo más adelante, un esquema que los reúne .

Sabemos que cuando una partícula de masa “m” rota en torno a un eje cualquiera que podemos designar como eje “Δ” le asignamos un radio de rotación “R” ;también le asignamos una velocidad tangencial que acompaña a la partícula durante su trayectoria que como sabemos está ligada a la velocidad angular con la cual rota. Así por ejemplo si la partícula rota en el plano perpendicular al eje anterior conformando una circunferencia de radio R en ese plano, la velocidad tangencial acompaña a la partícula en ese plano. Tomando solo el módulo de la relación que vincula a las variables decimos $V=W*R$

Como sabemos, existe una **relación vectorial** entre estas magnitudes (velocidad angular y velocidad tangencial) que podemos expresar a través del siguiente determinante, donde a priori asignamos al radio R sobre el plano (llamémoslo XY), con la dirección del eje X y a la velocidad angular con la dirección del eje Z perpendicular al plano de rotación X,Y.(hemos reemplazado para el ejemplo al eje genérico Δ por el eje Z).

Si esta asignación a priori de la dirección del vector rotación W es correcta, deberíamos encontrar que la dirección del vector velocidad esté contenida en el plano XY como dijimos al inicio, con la dirección del eje Y. Desarrollemos entonces el determinante

$$\hat{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & W \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{V} = \bar{i} * \begin{vmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} * \begin{vmatrix} 0 & W \\ R & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} * \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{vmatrix}$$

Obviamente el primero y tercer término valen cero al desarrollar el determinante y solo queda el segundo que nos da el resultado buscado

$$\bar{V} = \bar{j} W * R$$

Es decir un vector velocidad tangencial con la dirección del eje y.

Nota (Ver figura al final de esta introducción que reúne todos conceptos y algunos más que completan a continuación esta idea de repaso)

Significa además que es correcto que la velocidad angular esté alineada con el eje de rotación elegido como postulamos.

Si seguimos repasando conceptos nos encontramos con otra **magnitud vectorial** que podría estar asociada a esta partícula **que rota** y que es la **cantidad de movimiento** designada como " \vec{p} " y que como sabemos responde a: $\vec{p} = m * \vec{V}$

Como en este caso la partícula rota (no se traslada), la velocidad como vimos hace que la cantidad de movimiento se exprese como: $\vec{p} = m * \vec{W} \wedge \vec{R}$

Y también sabemos que existe otra **magnitud vectorial** asociada a esta partícula de masa "m" que rota en torno al eje elegido en este caso el eje Z, llamada **momento cinético** al cual designamos con la letra "**L**".

El vector momento cinético se define como "**el momento de la cantidad de movimiento**". Al aplicar este concepto en nuestro ejemplo, tendremos:

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$$

Luego reemplazamos a \vec{P} por la equivalencia anterior y tendremos $\vec{L} = \vec{R} \wedge m(\vec{W} \wedge \vec{R})$

$$\vec{L} = m * R^2 * \vec{W}$$

Donde vemos que el vector rotación está acompañado por un ESCALAR llamado **MOMENTO de INERCIA de la PARTICULA** ;(nuestra masa "m"), respecto del eje de referencia, en este caso el eje Z.

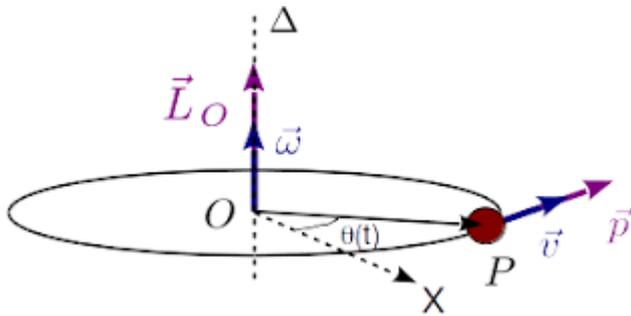
(Nota Vemos también que los vectores "W" y "L" son colineales. Tienen ambos en este ejemplo la dirección del eje "Z")

*O sea que están ambos acompañados del versor \vec{k} (se demuestra aplicando el determinante donde el vector R tiene la dirección del eje X y el vector $m*W*R$ la dirección del eje Y.)*

Definimos entonces el escalar mencionado como $I_z = m * R^2$

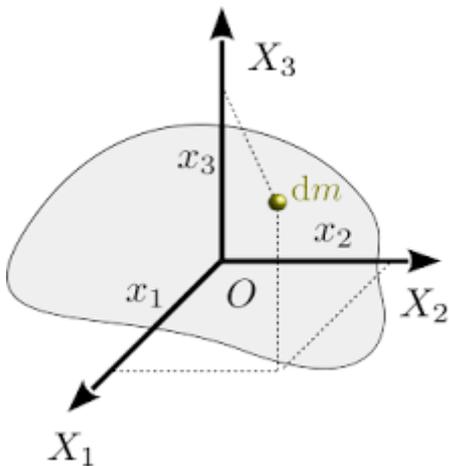
Por lo tanto podemos escribir genéricamente $\vec{L} = I * \vec{W}$ y en este caso particular

$$(\vec{k})L = (\vec{k})I_z * W$$



Dando otro paso; si en lugar de analizar el comportamiento de una partícula al rotar, vamos al caso más general de un sólido, que rota (supongamos alrededor del eje Z para no cambiar de eje, pero puede ser un eje cualquiera), nuestro momento de inercia se conformará por la suma infinita de los momentos de inercia respecto al eje en cuestión de cada una de sus partículas componentes, lo que es habitual expresarlo como:

$$I_z = \int r^2 * dm$$



Pero ahora hemos pasado de analizar el comportamiento de una masa que rota en un plano, a comenzar el análisis de rotación de un sólido que presenta componentes en el espacio tridimensional y que habitualmente llamamos coordenadas X; Y; Z. o también como se suele usar en la bibliografía de maquinarias : $X_1; X_2; X_3$

Dado un cuerpo rígido de masa “m”, de densidad “ ρ ” y volumen “V” referido a una terna ortogonal de origen “O” X, Y; Z ó $X_1; X_2; X_3$, definimos a continuación:

- a)** Momentos de inercia del cuerpo rígido respecto de los ejes X;Y;Z

$$I_{xx} = I_{11} = \int dm * (y^2 + z^2) = \int dm * (x_2^2 + x_3^2)$$

$$I_{yy} = I_{22} = \int dm * (x^2 + z^2) = \int dm * (x_1^2 + x_3^2)$$

$$I_{zz} = I_{33} = \int dm * (x^2 + y^2) = \int dm * (x_1^2 + x_2^2)$$

b) Momentos centrífugos (o momentos producto) , respecto a los mismos ejes

$$I_{xy} = I_{12} = - \int dm * (x * y) = - \int dm * (x_1 * x_2)$$

$$I_{xz} = I_{13} = - \int dm * (x * z) = - \int dm * (x_1 * x_3)$$

$$I_{yz} = I_{23} = - \int dm * (y * z) = - \int dm * (x_2 * x_3)$$

Todas las fórmulas anteriores pueden agruparse de forma más elegante en una sola expresión utilizando un operador llamado “delta de Kronecker” tomando la siguiente forma:

$$I_{i,j} = \int (\delta_{i,j} * r^2 - x_i * x_j) * dm$$

Donde $\delta_{i,j} = 1$ para $i=j$

$\delta_{i,j} = 0$ para $i \neq j$

Hagamos el ejercicio de reemplazar y aplicar los sucesivos valores para demostrar que la última expresión resume todas las expresiones iniciales.

En primer lugar observando la última figura para ubicar el dm (en la terna mostrada), como se ve en álgebra $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ de modo que también se puede escribir:

$$I_{i,j} = \int (\delta_{i,j} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j) dm$$

Veamos la demostración:

1° Si $i=j=1$ aplicamos la expresión con delta de Kronecker

$$I_{11} = I_{xx} = \int (1 * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 * x_1) dm \quad \text{Nota: integramos para toda la masa "m" y simplificamos los términos iguales positivo y negativo}$$

$$I_{11} = I_{xx} = \int (x_2^2 + x_3^2) * dm ; \quad \text{ó bien}$$

$$I_{11} = I_{xx} = \int (y^2 + z^2) * dm \quad (\text{que es la definición inicial})$$

2° Si $i=j=2$ aplicamos nuevamente la expresión con delta de Kronecker y resulta:

$$I_{22} = I_{yy} = \int (1 * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_2 * x_2) dm \quad \text{Nota: integramos para toda la masa "m" y simplificamos los términos iguales positivo y negativo}$$

$$I_{22} = I_{yy} = \int (x_1^2 + x_3^2) * dm ; \quad \text{ó bien}$$

$$I_{22} = I_{yy} = \int (x^2 + z^2) * dm \quad (\text{que es la definición inicial})$$

3° Si $i=j=3$ aplicamos nuevamente la expresión con delta de Kronecker y resulta:

$$I_{33} = I_{zz} = \int (1 * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3 * x_3) dm \quad \text{Nota: integramos para toda la masa "m" y simplificamos los términos iguales positivo y negativo}$$

$$I_{33} = I_{zz} = \int (x_1^2 + x_2^2) * dm ; \quad \text{ó bien}$$

$$I_{33} = I_{zz} = \int (x^2 + y^2) * dm \quad (\text{que es la definición inicial})$$

4° Si $i=1$ y $j=2$ aplicamos nuevamente la expresión con delta de Kronecker:

$$I_{i,j} = \int (\delta_{i,j} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j) dm$$

Donde reemplazamos

$$I_{12} = I_{xy} = \int (0 * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 * x_2) dm$$

$$I_{12} = I_{xy} = - \int x_1 * x_2) dm \quad \text{ó bien}$$

$$I_{12} = I_{xy} = - \int x * y) dm \quad \text{que es la definición inicial}$$

OBSERVACIÓN

Simplemente de la definición de cada uno de los momentos centrífugos (o momentos producto) resulta evidente que son iguales de a pares, por la propiedad del producto donde el orden no altera el resultado. Es decir:

$$I_{12} = I_{xy} = I_{yx} = I_{21}$$

Esto nos dice que de las 9 componentes a calcular mencionadas al principio nos bastará con calcular seis, ya que como veremos a continuación valen las mismas consideraciones para los restantes momentos centrífugos.

5° Si i=1 y j=3

$$I_{i,j} = \int [\delta_{i,j} * (\sum_{i=1}^3 x_i^2) - x_i * x_j] * dm$$

que como vimos antes es lo mismo que

$$I_{i,j} = \int [\delta_{i,j} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j] * dm$$

Y reemplazando

$$I_{i,j} = \int [\mathbf{0} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j] * dm$$

$$I_{i,j} = \int [-x_i * x_j] * dm$$

$$I_{1,3} = \int -[x_1 * x_3] * dm$$

O lo que es lo mismo

$$I_{x,z} = \int -[x * z] * dm$$

Que es la definición inicial. También vale entonces por lo mencionado

$$I_{x,z} = I_{z,x} = \int -z * x * dm$$

6° Por último si i=2 y j=3

$$I_{i,j} = \int [\delta_{i,j} * (\sum_{i=1}^3 x_i^2) - x_i * x_j] * dm$$

Que como vimos antes es lo mismo que

$$I_{i,j} = \int [\delta_{i,j} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j] * dm$$

Y reemplazando

$$I_{i,j} = \int [\mathbf{0} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_i * x_j] * dm$$

$$I_{i,j} = \int [-x_i * x_j] * dm$$

$$I_{2,3} = \int -[x_2 * x_3] * dm$$

O lo que es lo mismo

$$I_{y,z} = \int -[y * z] * dm$$

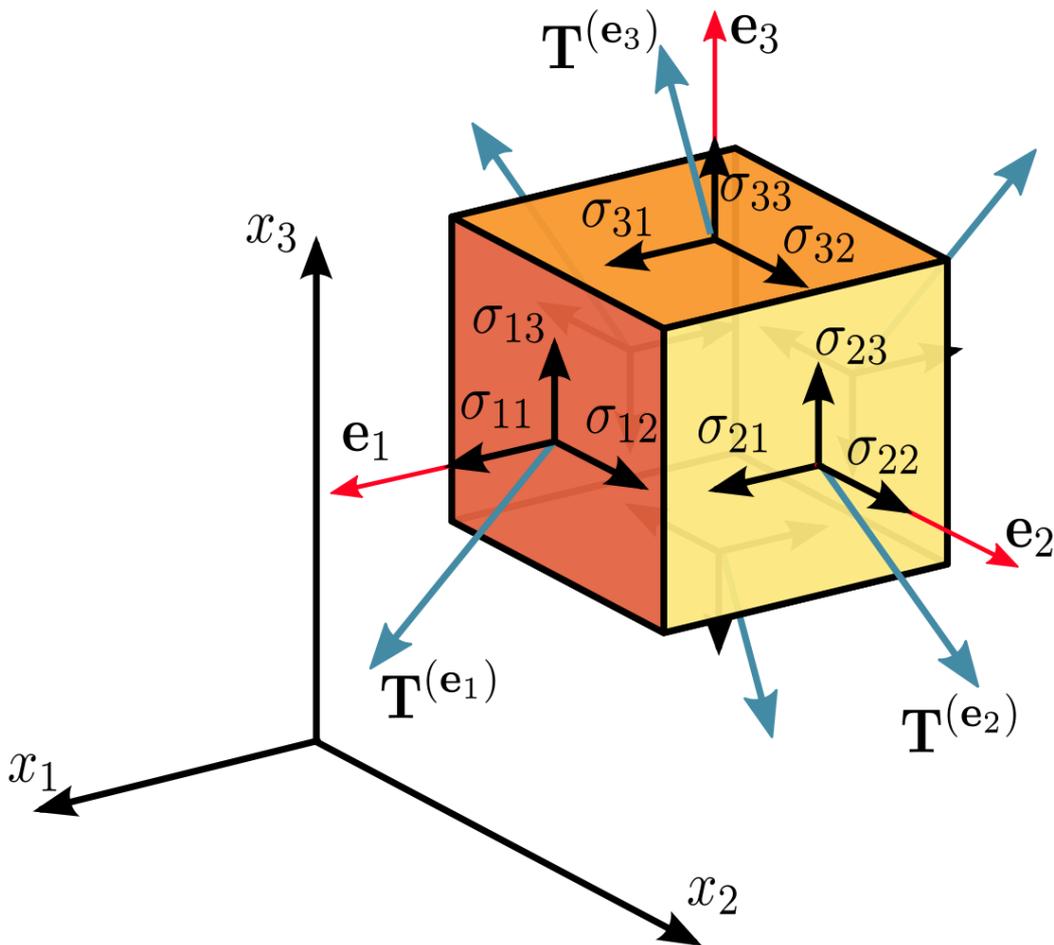
Que es la definición inicial.

También vale entonces por lo mencionado

$$I_{y,z} = I_{z,y} = \int -z * y * dm$$

En general en lo que respecta a nuestro estudio nos resulta más conveniente representar a tensores por matrices. Los tensores tienen asociada una magnitud a un módulo en cada una de sus componentes. Las matrices en general se asocian con cantidades numéricas para simplicidad en el trato algebraico. Podemos decir también que un tensor de orden cero es un escalar; un tensor de orden 1 es un vector y que un tensor de segundo orden es una matriz.

Existen entonces tensores con numerosas aplicaciones según la unidad asociada que mencionamos. Así por ejemplo conocemos el tensor de tensiones, que se utiliza entre otras cosas para estudiar el comportamiento en un sector de la estructura de un edificio, debido a la acción de cargas puntuales concentradas o distribuidas; vibraciones, etc... En ese caso la unidad es $\frac{N}{m^2}$; $\frac{Kgr}{cm^2}$ etc... El esquema de representación de las tensiones en un punto de la estructura se suele ilustrar de la siguiente forma:



Donde las direcciones marcadas en rojo y con los subíndices 1,1 ;2,2 y 3,3 corresponden a los ejes de la terna ortogonal X;Y;Z

A nosotros ahora nos ocupa el estudio del tensor de inercia (no el de tensiones) y de acuerdo a las definiciones la unidad será por ejemplo $Kg * m^2$

Esas 9 componentes calculadas en los pasos anteriores, le darán forma a nuestro tensor de inercia que haciendo abstracción de la unidad (factor común que sale fuera) lo llamamos matriz de inercia. Su forma será:

$$I = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} & I_{1,3} \\ I_{2,1} & I_{2,2} & I_{2,3} \\ I_{3,1} & I_{3,2} & I_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, de los valores que presente esta matriz en sus filas y columnas (que como dijimos están referidos a una terna elegida X;Y;Z cualquiera) ,dependerá el comportamiento de nuestro sólido al rotar ,que será diferente para el mismo sólido con la misma masa M ,el mismo material, las mismas dimensiones, si utilizamos un eje de rotación perteneciente a una terna rotada respecto de la original.

En otras palabras es muy común en la práctica, que en un sólido que rota, el vector velocidad angular “W”, no esté alineado con el vector momento cinético “L”. Esto tiene consecuencias como veremos seguidamente.

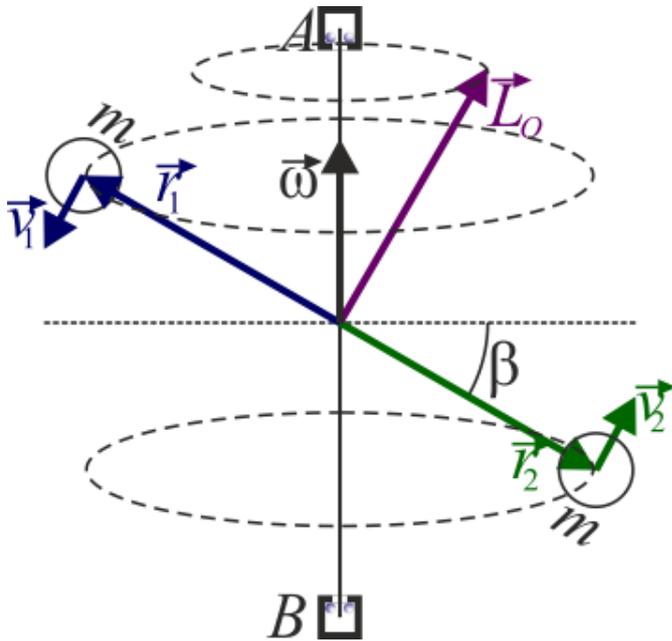
Para evitar estas consecuencias que mencionaremos, nuestro propósito es llegar a diagonalizar esta matriz, es decir encontrar una terna de Ejes $X';Y';Z'$ para la cual nuestro tensor de inercia de las nueve componentes tenga solo tres distintas de cero y ubicadas sobre la diagonal principal. En ese caso nuestro tensor se llamará **tensor principal de inercia** y a los ejes de esa terna se los llama : **ejes principales de inercia**. Este tensor tiene la forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

¿Por qué queremos encontrar este tensor?

Porque cuando un sólido rota en torno a un eje principal de inercia, nos aseguramos que el vector momento cinético ”L”, siga siendo colineal con el vector velocidad angular “W”, como mencionamos al iniciar el tema con la partícula rotante.

Es el caso por ejemplo de los rotores de los motores eléctricos, que los podemos asimilar a un cilindro rotando alrededor de un eje principal, cuanto más potencia tenga este motor, más importante es que su rotor esté bien balanceado, rotando sobre un eje principal de inercia, ya que el desbalanceo que indica la rotación sobre cualquier otro eje, provoca vibraciones y trepidaciones pudiendo en algunos casos hasta cortar los bulones de anclaje. En este caso del desbalanceo, el vector momento cinético y el vector rotación angular, no están alineados.



Los ejes principales de inercia son ejes de simetría del sólido. Si hay desbalanceo es porque perdimos la simetría.

Otro ejemplo de aplicación de estos conceptos y que nos resulta familiar, es el de la máquina balanceadora de ruedas de automóviles y camiones. Esta máquina tiene un eje sobre el que se coloca la rueda a balancear y un programa que calcula las pequeñas masas de plomo y la ubicación donde colocarlas, sobre la periferia de la llanta, para lograr que el eje de la rueda vuelva a ser eje de simetría y principal de inercia.

En esa condición una vez logrado el balanceo, notaremos que pequeñas trepidaciones que podríamos llegar a percibir sobre el volante con la rueda desbalanceada habrán desaparecido. Los desbalanceos influyen además en el prematuro desgaste de los neumáticos.

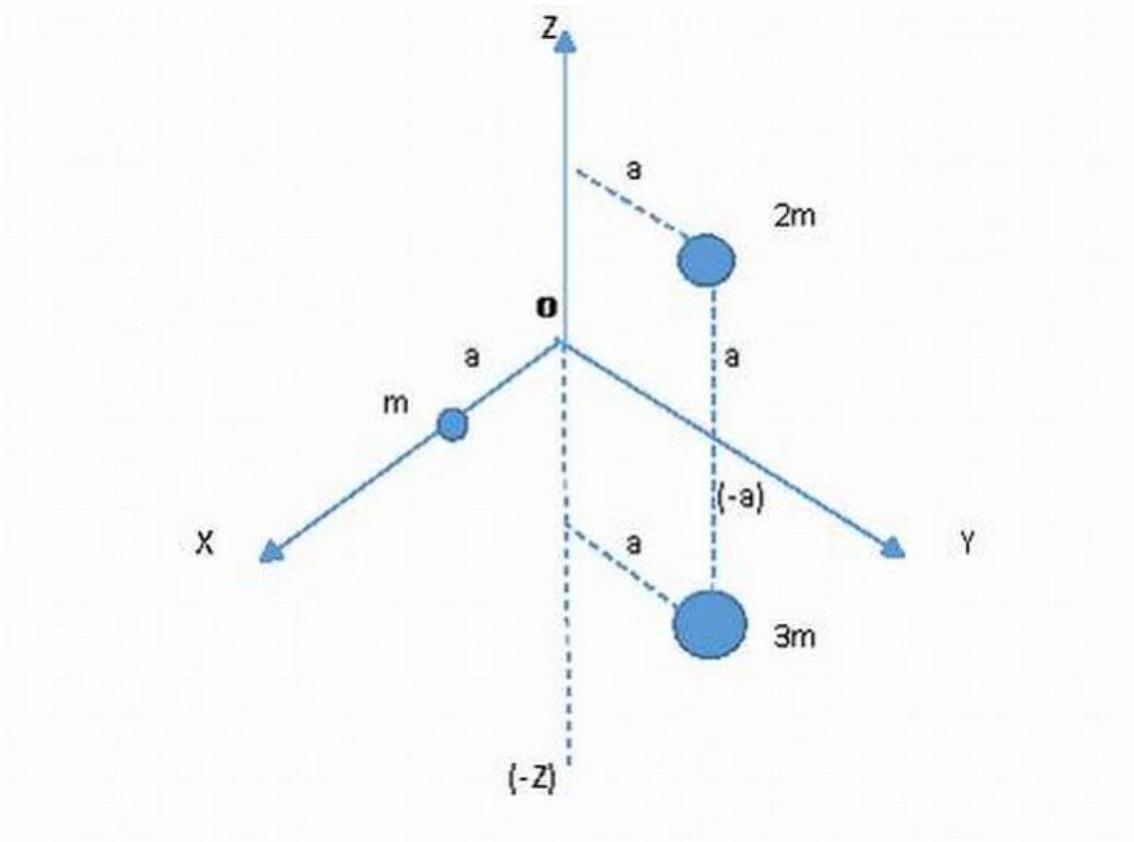
Un detalle más sobre esta máquina balanceadora de ruedas y neumáticos, es que **opera dentro de un rango admisible**, fuera del cual se aconseja cambiar la llanta.

Esto es debido a que si bien matemáticamente es posible hallar un valor o varios valores de masas adicionales a agregar sobre la llanta para el balanceo, como estos se colocan a presión con pestañas sobre la periferia de la llanta ; si el vehículo va a muy alta velocidad y se desprende una masa de calibración de valor grande, puede aparecer una trepidación peligrosa sobre el sistema que conforma la barra de dirección con sus accesorios y hasta romperse alguno de ellos pudiendo ocurrir un siniestro.

Ahora veremos para completar esta primera parte un ejemplo de cálculo para fijar y aclarar conceptos relacionados con nuestro tensor de inercia.

Vamos a considerar una pieza (elemento de máquina), conformado por plástico inyectado sobre nervios de aluminio en los puntos donde la pieza debe presentar más resistencia mecánica. Analizando como trabaja se hace una simplificación de su geometría reemplazándola por 3 masas estratégicamente ubicadas sobre una terna de ejes coordenados X; Y; Z.

Valor de la masa	Ubicada en coordenada del eje X	Ubicada en coordenada del eje Y	Ubicada en coordenada del eje Z
m	a	0	0
2m	0	a	a
3m	0	a	-a



Acá vemos que esa pieza con esquema simplificado sobre una terna X; Y; Z, (para facilitar el estudio y la determinación del tensor de inercia) ,presenta: una masa sobre el eje X y dos masas sobre el plano YZ.

Vamos a calcular entonces nuestro tensor de inercia según los datos que nos dieron y como es una matriz procederemos luego a diagonalizarla, (según las reglas del álgebra); para encontrar el TENSOR PRINCIPAL DE INERCIA, (matriz con solo valores distintos de cero en su diagonal principal) y las direcciones de su nueva terna ortogonal asociada, distinta de la original y que llamaremos ;X';Y';Z'.

Haremos todos los pasos para ello.

Como hemos simplificado el sólido (la pieza), reemplazándolo por tres masas puntuales, en las definiciones generales para cada componente del tensor cambiaremos en este caso

las integrales por sumatorias discretas, como hacemos habitualmente en Física cuando estudiamos sólidos a los que reemplazamos por masas puntuales.

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^3 m_i * (y_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{xx} = m_1 * (y_1^2 + z_1^2) + m_2 * (y_2^2 + z_2^2) + m_3 * (y_3^2 + z_3^2) \quad y$$

reemplazando datos

$$I_{xx} = m * (0 + 0) + 2m * (a^2 + a^2) + 3m * (a^2 + (-a)^2)$$

$$I_{xx} = 4m * (a^2) + 6m * (a^2) = 10m * (a^2)$$

Análogamente

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^3 m_i * (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_{yy} = m_1 * (x_1^2 + z_1^2) + m_2 * (x_2^2 + z_2^2) + m_3 * (x_3^2 + z_3^2) \quad y$$

reemplazando datos

$$I_{yy} = m * (a^2 + 0) + 2m * (0 + a^2) + 3m * (0 + (-a)^2)$$

$$I_{yy} = m * (a^2) + 2m * (a^2) + 3m * (a)^2)$$

$$I_{yy} = 6m * (a^2)$$

A su vez

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^3 m_i * (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{zz} = m_1 * (x_1^2 + y_1^2) + m_2 * (x_2^2 + y_2^2) + m_3 * (x_3^2 + y_3^2) \quad y$$

reemplazando datos

$$I_{zz} = m * (a^2 + 0) + 2m * (0 + a^2) + 3m * (0 + (-a)^2)$$

$$I_{zz} = m * (a^2) + 2m * (a^2) + 3m * (a^2)$$

$$I_{zz} = 6m * (a^2)$$

Ahora vamos por las componentes del tensor que están fuera de la diagonal principal recordando las simetrías que mencionamos antes que nos hace simplificar los cálculos ya que:

$$I_{xy} = I_{yx}$$

$$I_{xz} = I_{zx}$$

$$I_{yz} = I_{zy}$$

Calculemos las componentes faltantes:

$$I_{1,2} = I_{xy} = \int -x * y dm = - \sum_{i=1}^3 m_i * x_i * y_i$$

Reemplazando valores

$$I_{1,2} = I_{xy} = -[m * (a * 0) + 2m * (0 * a) + 3m * (0 * (-a))]$$

Luego

$$I_{1,2} = I_{xy} = I_{yx} = 0$$

Análogamente:

$$I_{1,3} = I_{xz} = \int -x * z dm = - \sum_{i=1}^3 m_i * x_i * z_i$$

Reemplazando valores

$$I_{1,3} = I_{xz} = I_{zx} = I_{3,1} = -[m * (a * 0) + 2m * (0 * a) + 3m * (0 * (-a))]$$

$$I_{1,3} = I_{xz} = I_{zx} = I_{3,1} = 0$$

También

$$I_{2,3} = I_{yz} = \int -y * z dm = - \sum_{i=1}^3 m_i * y_i * z_i$$

Reemplazando valores

$$I_{2,3} = I_{yz} = I_{zy} = I_{3,2} = -[m * (0 * 0) + 2m * (a * a) + 3m * (a * (-a))]$$

$$I_{2,3} = I_{yz} = I_{zy} = I_{3,2} = m * a^2$$

Entonces nuestro tensor de inercia con los datos del problema para la terna ortogonal X; Y; Z queda de la siguiente manera:

$$I = \begin{bmatrix} 10ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6ma^2 & ma^2 \\ 0 & ma^2 & 6ma^2 \end{bmatrix}$$

Ahora queremos dar otro paso y encontrar el TENSOR PRINCIPAL de INERCIA. Es decir queremos encontrar una terna ortogonal X'Y'Z' que estará rotada respecto de la terna inicial, para la cual tengamos este tensor con solo valores fuera de cero en la diagonal principal.

Para ello procederemos a diagonalizar la matriz. Este procedimiento se estudia en Álgebra donde conocida una matriz genérica "A" se recurre a la expresión de Clayperon. Esta consiste en formar un polinomio ordenado en un parámetro "λ". Dicho polinomio igualado a cero recibe el nombre de ecuación característica. Al resolver la ecuación surgen sus raíces llamadas AUTOVALORES.

En nuestra aplicación, dichos autovalores son las componentes principales del buscado TENSOR PRINCIPAL de INERCIA, que obviamente ocupan su diagonal principal.

Finalmente a partir de los autovalores hallados, procederemos a encontrar los AUTOVECTORES que nos dan las nuevas direcciones ortogonales que dijimos llamar X'Y'Z', para la cual nuestro tensor inicial pasa a ser PRINCIPAL de INERCIA.

Desarrollo del método:

La expresión de Clayperon se escribe:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda * I_3) = 0$$

Donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico ordenado en λ e igualado a cero.

λ es la variable que nos brinda las raíces de la ecuación característica las cuales se llaman AUTOVALORES.

“A” es en nuestro caso la matriz de 3 filas y 3 columnas que se forma con las componentes calculadas (como hemos hecho) del tensor de inercia para una terna genérica inicial X; Y; Z .

I_3 es una matriz unidad de tres filas y tres columnas.

Hagamos el ejercicio con los datos de nuestro problema.

$$p(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} - \lambda * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Reemplazando datos:

$$p(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} 10ma^2 & 0 & 0 \\ I_{yx} & 6ma^2 & ma^2 \\ I_{zx} & ma^2 & 6ma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

Es de notar que en la matriz “A”, podemos extraer el factor común m dado que solo opera como factor de escala y para que nuestro tensor de inercia tenga las unidades adecuadas a nuestra aplicación. Pero no modifica de ningún modo la dirección de los autovectores que buscamos para tener las direcciones en el espacio de la nueva terna ortogonal X';Y'; Z' a la que asociaremos el *tensor principal de inercia* .

Si; debemos recordar que una vez hallado el tensor principal de inercia, le tenemos que acoplar el factor común $m * a^2$ para manejarnos con las unidades adecuadas. Dicho esto escribimos:

$$p(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

Operando la diferencia de matrices

$$p(\lambda) = \det \left[\begin{pmatrix} (10 - \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (6 - \lambda) & 1 \\ 0 & 1 & (6 - \lambda) \end{pmatrix} \right] = 0$$

Ahora desarrollamos el determinante de acuerdo con las reglas del álgebra:

$$p(\lambda) = (10 - \lambda) * \begin{vmatrix} (6 - \lambda) & 1 \\ 1 & (6 - \lambda) \end{vmatrix} - 0 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (6 - \lambda) \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 0 & (6 - \lambda) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$p(\lambda) = (10 - \lambda) * [(6 - \lambda)^2 - 1] = 0$$

Se presentan 3 posibles raíces a partir de

$$1^\circ (10 - \lambda) = 0 \quad \text{de donde } \lambda_1 = 10$$

$$2^\circ (6 - \lambda)^2 - 1 = 0 \quad \text{Luego } (6 - \lambda)^2 = 1$$

De donde surgen las otras dos raíces $(6 - \lambda) = \sqrt{1}$ lo cual puede ser

$$(6 - \lambda_2) = 1$$

O bien

$$(6 - \lambda_3) = -1$$

Finalmente

$$\lambda_2 = 5$$

$$\lambda_3 = 7$$

Ahora sí por lo mencionado en párrafos anteriores, tenemos el tensor principal de inercia:

$$I' = m * a^2 \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ o finalmente } I' = \begin{bmatrix} 10ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 7ma^2 \end{bmatrix}$$

Pero todavía no conocemos las direcciones en el espacio de la nueva terna ortogonal $X'Y'Z'$.

Para hallar dichas direcciones partiremos de los autovalores hallados y encontraremos tres autovectores perpendiculares entre sí, que serán sus versores: (vectores unitarios).

Procederemos así:

Multiplicamos nuestra matriz original “A” por un vector genérico $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ lo cual nos da otro vector que a su vez igualaremos en tres ocasiones al vector conformado por el producto de cada uno de los autovalores λ hallados con el vector genérico anterior. Esto es:

$$(A) * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda_1 * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{ donde } \lambda_1 = 10$$

$$(A) * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda_2 * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{ donde } \lambda_2 = 5$$

$$(A) * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda_3 * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \text{ donde } \lambda_3 = 7$$

Reemplazamos la matriz por sus componentes en los tres casos y tenemos:

Caso 1

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10X \\ 10Y \\ 10Z \end{bmatrix}$$

Caso2

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X \\ 5Y \\ 5Z \end{bmatrix}$$

Caso3

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7X \\ 7Y \\ 7Z \end{bmatrix}$$

Ahora desarrollaremos cada una de las tres igualdades para encontrarnos en cada uno de los tres casos con tres ecuaciones lineales, las cuales resolveremos. Veamos:

Caso1

$$10 * X + 0 * Y + 0 * Z = 10X \quad (1)$$

$$0 * X + 6 * Y + 1 * Z = 10Y \quad (2)$$

$$0 * X + 1 * Y + 6 * Z = 10Z \quad (3)$$

De la (1) vemos que cualquier valor de X cumple la igualdad , pero como buscamos un versor unitario nos conviene tomar el menor valor de los números naturales es decir **X=1**

Veamos ahora la (2) y la (3)

Pasando términos de un miembro a otro en la (2) y en la (3) tenemos:

$$Z = 4 * Y$$

$$Y = 4 * z$$

O sea

$$Y = 4 * 4 * Y = 16Y$$

Obviamente la única posibilidad de compatibilidad es que $Y=0$

y análogamente para la otra igualdad al reemplazar Y por cero nos queda $0=4Z$ donde nuevamente la única posibilidad de compatibilidad es $Z=0$.

Entonces concluimos que para el autovalor $\lambda = 10$ el autovector asociado será :

$$(1(\hat{i}) + 0(\hat{j}) + 0(\hat{k}))$$

Que tiene forma de versor unitario y que ya vemos que concuerda en este problema con la primitiva dirección del eje X . Es decir que el eje X de la terna original coincide (en este caso), con el nuevo X' que buscamos para referir nuestro tensor principal de inercia.

Pero veamos que pasa con Y' y con Z' .

Para ello pasamos a resolver el caso 2 y 3 con sus autovalores correspondientes del mismo modo que lo hicimos en el caso 1.

$$10 * X + 0 + 0 = 5 * X \quad (1)$$

$$0 * X + 6 * Y + Z = 5 * Y \quad (2)$$

$$0 * X + Y + 6 * Z = 5 * Z \quad (3)$$

Tomando la (1) y operando

$$10 * X - 5 * X = 0$$

$5 * X = 0$ por lo tanto

$$X = 0$$

Tomando la (2)

$$6 * Y - 5 * Y + Z = 0$$

$$Y + Z = 0$$

Tomando la (3)

$$Y + 6 * Z - 5 * Z = 0$$

$$Y + Z = 0$$

De todas las infinitas posibilidades tomamos como antes la condición de menor valor ya que buscamos un versor unitario , es decir si fijamos $Y=1$ será $Z= -1$.

Finalmente para el **autovalor** $\lambda= 5$ nuestro versor unitario que define la dirección de **Y'** será : **$0\hat{i}; 1\hat{j}; -1 * \hat{k}$**

Pasamos al caso 3

$$10*X+0+0=7*X \quad (1)$$

$$0X+6*Y+Z=7*Y \quad (2)$$

$$0*X+Y+6*Z=7*Z \quad (3)$$

Nuevamente en la (1) tenemos :

$$10X-7X=0 \quad \text{O sea } 3X=0 \quad \text{o bien } X=0$$

En la (2)

$$6Y-7Y+Z=0 \quad \text{O sea } Z=7Y-6Y \quad \text{o bien } Z=Y$$

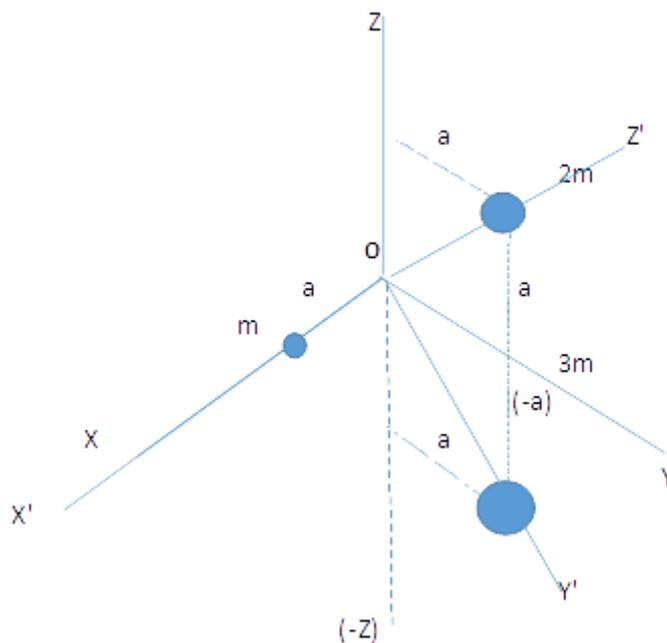
En la (3)

$$Y=7Z-6Z \quad \text{O sea } Y=Z$$

Entonces para el autovalor $\lambda=7$, el autovector más pequeño asociado (versor) que dará la dirección del nuevo eje Z' será: $0\hat{i}; 1\hat{j}; 1\hat{k}$

Dibujamos entonces superpuestas la terna original $X; Y; Z$ y la terna final $X'; Y'; Z'$ a la que está referida nuestro tensor principal de inercia, siendo estos últimos ejes ortogonales entre si los ejes principales de inercia de nuestra pieza en estudio.

Observamos que en este caso que los ejes principales de inercia pasan por el centro de masa de cada una de las masas que conforman el núcleo de nuestra pieza.



Hagamos ahora la verificación de que las componentes del nuevo tensor de inercia para los ejes $X'Y'Z'$ cumplan con la condición de TENSOR PRINCIPAL de INERCIA. Para ello calculemos cada una de las componentes de este nuevo tensor.

$$I'_{xx} = \sum_{i=1}^3 m_i * (y'_i{}^2 + z'_i{}^2)$$

Desarrollando

$$I'_{xx} = m * (0 + 0) + 2m * (0 + (a * \sqrt{2})^2) + 3m * ((a * \sqrt{2})^2 + 0)$$

$$I'_{xx} = 2m * 2a^2 + 3m * 2a^2$$

$$I'_{xx} = 10ma^2$$

Análogamente para el eje **Y'**

$$I'_{yy} = \sum_{i=1}^3 m_i * (x'_i{}^2 + z'_i{}^2)$$

Desarrollando

$$I'_{yy} = m * (a^2 + 0) + 2m * (0 + (a * \sqrt{2})^2) + 3m * (0 + 0)$$

$$I'_{yy} = m * a^2 + 2m * 2a^2$$

$$I'_{yy} = 5ma^2$$

Para el eje **Z'**

$$I'_{zz} = \sum_{i=1}^3 m_i * (x'_i{}^2 + y'_i{}^2)$$

Desarrollando

$$I'_{zz} = m * (a^2 + 0) + 2m * (0 + 0) + 3m * (0 + (\sqrt{2} * a)^2)$$

$$I'_{zz} = m * a^2 + 0 + 3m * 2a^2$$

$$I'_{zz} = 7ma^2$$

Como hemos hallado el tensor principal de inercia todas las otras componentes del tensor deben dar cero. Veamos:

$$I'_{xy} = - \sum_{i=1}^3 m_i * (x' * y')$$

$$I'_{xy} = -[m * (0 * 0) + 2m * (0 * 0)] + 3m * (0 * 0)$$

$$I'_{xy} = -[0 + 0 + 0] = 0$$

y por lo tanto su espejo respecto de la diagonal de la matriz

$$I'_{yx} = 0$$

Por otro lado

$$I'_{xz} = - \sum_{i=1}^3 m_i * (x' * z')$$

$$I'_{xz} = -[m * (a * 0) + 2m * (0 * a\sqrt{2}) + 3m * (0 * 0)]$$

$$I'_{xz} = -[0 + 0 + 0] = 0$$

y por lo tanto su espejo respecto de la diagonal de la matriz

$$I'_{zx} = 0$$

Con lo cual hemos verificado que nuestro tensor principal de inercia para este problema es:

$$I' = m * a \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

PARTE 2. EJEMPLOS PRÁCTICOS de USO HABITUAL

Ahora vamos a pasar a analizar el tensor principal de inercia de tres sólidos conocidos y que son los más empleados a nivel artefactos domésticos; en elementos de máquinas industriales y medios de transporte tanto de cargas como de personas, (terrestres, navales y aéreos).

En todos ellos tenemos piezas que contienen cilindros; esferas o conos.

Ejemplos: en todas las máquinas hay rodamientos que contienen pequeñas esferas llamados rodamientos a bolillas. Máquinas pesadas como vagones de ferrocarril, usan rodamientos llamados “NU” que en lugar de bolillas tienen un conjunto de pequeños barrilitos cilíndricos. Estos rodamientos son de mayor diámetro y soportan mayores tensiones mecánicas e impactos.

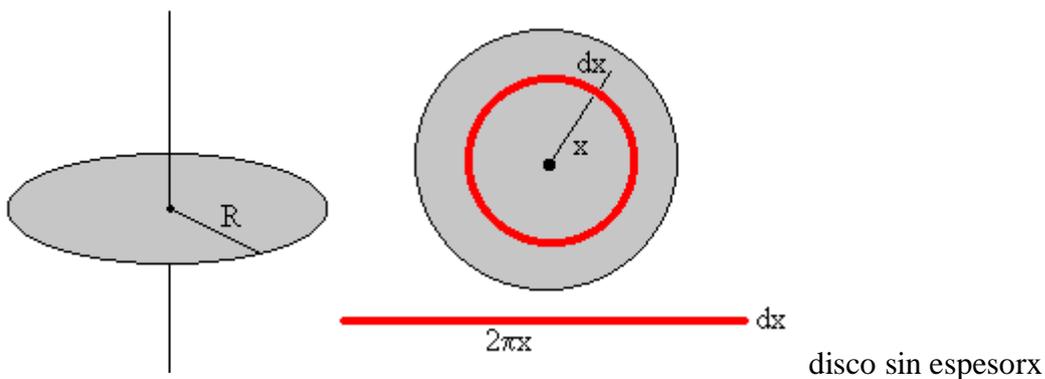
También hay muchas piezas de rotación con forma cónica en máquinas importantes como las centrífugas, usadas en industria textil; petroquímica, etc...

Para seguir, un orden vamos a comenzar recordando lo que se da habitualmente en las clases de Física.

2.1) Momento de inercia de un disco respecto de un eje perpendicular que pasa por su baricentro

Dibujamos un disco en el plano horizontal XY con un eje central perpendicular al plano del disco coincidente con el eje Z. Tomamos un diferencial de masa en torno al eje Z a una distancia “ r ” del eje y aplicamos el concepto de momento de inercia.

$$I = \int_0^R dm * x^2$$



Pero:

$$dm = \rho * d\text{Área} = \rho * 2\pi * x * dx$$

Donde ρ es la densidad del material (en este caso densidad superficial)

Y reemplazando en la integral inicial

$$I = \int_0^R \rho * 2\pi * x * dx * x^2$$

ordenando y sacando constantes fuera de la integral tenemos:

$$I = \rho * 2\pi \int_0^R x^3 * dx$$

$$I = \rho * 2\pi * \frac{R^4}{4} = \rho * 2\pi * R^2 * \frac{R^2}{4} = \rho * \text{Área} * \frac{R^2}{2} = \frac{M * R^2}{2}$$

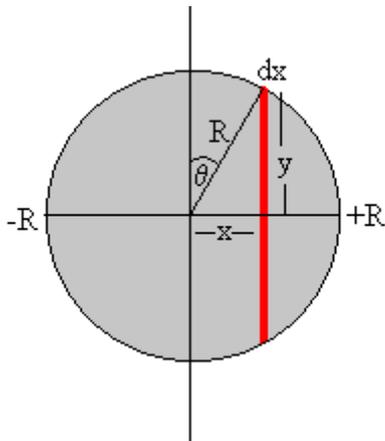
$$I = \frac{M * R^2}{2}$$

Nota en este primer paso consideramos un disco sin espesor. Luego lo agregaremos y en lugar de área usaremos volumen.

Ahora veamos:

2-2 Momento de inercia de un disco respecto de un eje que sea cualquiera de sus diámetros.

Por ejemplo, el diámetro que está contenido en el eje X ó en el eje Y del plano que representa el disco.



disco de espesor despreciable

Nuevamente llamamos “ ρ ” a su densidad. En este caso (figura sin espesor) resulta:

$$\rho = \frac{\text{Masa}}{\text{Área}}$$

Dibujamos un rectángulo cuya área como vemos en el dibujo vale :

$dA = (2 * y * dx)$ y entonces el diferencial de masa asociado será $dm = \rho * dA$ y por ende el momento de inercia para el eje “ y ” del dibujo (o cualquier otro diámetro contenido en el plano del disco) vale por definición:

$$I_y = \int_{-R}^R dm * x^2 = \int_{-R}^R \rho * dA * x^2 = \int_{-R}^R \rho * 2y * dx * x^2$$

$$I_y = 2 * \rho \int_{-R}^R y * dx * x^2 \quad (1)$$

Ahora hacemos un cambio de variables mirando el dibujo

$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \frac{y}{R} = \text{cos}\theta$$

$$\text{y por lo tanto} \quad y = R * \text{cos}\theta$$

$$\text{Ademàs} \quad \text{cos}(90^\circ - \theta) = \frac{x}{R} = \text{sen}\theta$$

$$\text{y por lo tanto} \quad x = R * \text{sen}\theta$$

De donde se desprende que $dx = R * \cos\theta * d\theta$ Reemplacemos en la (1)

$$I_y = 2 * \rho \int_{-R}^R R * \cos\theta * R * \cos\theta * d\theta * R^2 * (\text{sen}\theta)^2$$

Tambièn debemos remplazar los limites de la integral poniendo en lugar de $-R$ y $+R$ sus correspondientes ángulos en radianes. Es decir $-\frac{\pi}{2}$ y $+\frac{\pi}{2}$

$$I_y = 2 * \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta * \cos\theta * (\text{sen}\theta)^2 * d\theta \quad (2)$$

Ahora vamos a recordar una expresión trigonométrica muy utilizada que relaciona un ángulo con su doble $\text{sen}2\theta = 2 * \text{sen}\theta * \cos\theta$ luego

$$\text{O sea } \frac{1}{2} \text{sen}2\theta = \text{sen}\theta * \cos\theta \quad \text{que elevada al cuadrado}$$

$$\frac{1}{4} * (\text{sen}2\theta)^2 = (\text{sen}\theta)^2 * (\cos\theta)^2$$

Reemplazando en la (2)

$$I_y = 2 * \rho * R^4 * \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\text{sen}2\theta)^2 * d\theta$$

$$I_y = \frac{1}{2} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\text{sen}2\theta)^2 * d\theta \quad (3)$$

Vamos a hacer otro reemplazo dentro de la integral aprovechando otra de las relaciones trigonométricas de uso frecuente:

$$(\cos\theta)^2 - (\text{sen}\theta)^2 = \cos 2\theta$$

Y por lo tanto

$$1 - (\text{sen}\theta)^2 - (\text{sen}\theta)^2 = \cos 2\theta$$

$$1 - 2 * (\text{sen}\theta)^2 = \text{cos}2\theta$$

O bien

$$1 - 2 * (\text{sen}2\theta)^2 = \text{cos}4\theta$$

$$1 - \text{cos}4\theta = 2 * (\text{sen}2\theta)^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos}4\theta = (\text{sen}2\theta)^2$$

que podemos reemplazar en la (3)

$$I_y = \frac{1}{2} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos}4\theta \right) * d\theta$$

$$I_y = \frac{1}{4} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - \text{cos}4\theta) * d\theta$$

Que descomponemos en dos integrales

$$I_y = \frac{1}{4} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{4} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\text{cos}4\theta) d\theta \quad (4)$$

Pero solo debemos considerar la primera integral ya que la segunda es nula como demostreremos

$$I_y = \frac{1}{4} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{4} \rho * R^4 * \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi * \frac{1}{4} * \rho * R^4$$

$$I_y = \pi * \frac{1}{4} * \rho * R^2 * R^2 = \frac{Masa * R^2}{4}$$

Es de notar que el momento de inercia de un disco referido a un eje cualquiera contenido en su plano y que pasa por su baricentro es la mitad del momento de inercia que tiene el mismo disco para un eje baricéntrico pero perpendicular a su plano.

Nota :veamos como complemento lo mencionado de que la segunda integral de la expresión (4) es nula

$$\frac{1}{4} \rho * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos 4\theta) d\theta =$$

Hagamos un cambio de variables

$$4\theta = \alpha$$

$\theta = \frac{\alpha}{4}$ y por lo tanto $d\theta = \frac{1}{4} d\alpha$ y también cambian los límites de integración

Si hacemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ será $4\theta = 4 * \frac{\pi}{2} = 2\pi = \alpha$ el límite superior y obviamente $-2\pi = -\alpha$ el límite inferior de la integral que queda

$$\frac{1}{4} \rho * R^4 * \frac{1}{4} \int_{-2\pi}^{+2\pi} (\cos \alpha) d\alpha = \frac{1}{16} \rho * R^4 * (\text{sen} 2\pi - \text{sen}(-2\pi)) = 0$$

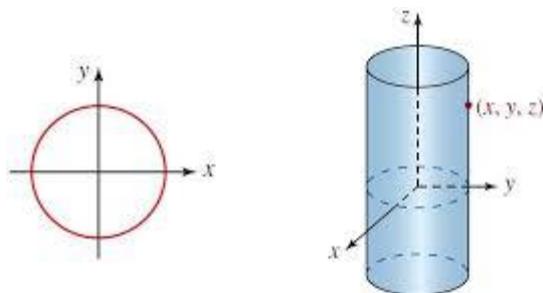
Por eso no la hemos considerado en el paso anterior

Como curiosidad vemos que el momento de inercia de un disco respecto de un eje que sea cualquiera de sus diámetros, es la mitad del momento de inercia que tiene el mismo disco respecto de un eje que pasa por el baricentro y es perpendicular al plano que lo contiene.

Nota: existe un teorema conocido como “relación de momentos de inercia de ejes perpendiculares” que muchos aplican directamente, pero es más convincente seguir los pasos anteriores al menos una vez, para fijar conceptos.

Ahora estamos en condiciones de pasar a calcular los momentos de inercia en los sólidos mencionados: cilindro; esfera; cono.

2-3 Momentos principales de inercia en un cilindro. Tensor principal de inercia de un cilindro



Los ejes X; Y; Z son ejes de simetría del cilindro dibujado, conformando una terna ortogonal cuyo origen de coordenadas está en el centro de masa del cilindro. Al ser ejes de simetría los respectivos momentos de inercia respecto a cada uno de los tres ejes serán momentos principales de inercia. Ellos conformarán las componentes del tensor principal de inercia buscado, que están sobre su diagonal principal. O sea las componentes:

$$I_{xx}; I_{yy}; I_{zz}$$

Como mencionamos por ser estos ejes dibujados, ejes de simetría (luego ejes principales de inercia), las otras componentes $I_{xy}; I_{xz}; I_{yz}$ y por ende sus magnitudes espejo respecto de la diagonal principal $I_{yx}; I_{zx}; I_{zy}$ (productos cruzados de inercia: valdrán cero, como se advierte del dibujo, debemos entonces realizar solamente dos cálculos:

El momento de inercia respecto al eje z " I_{zz} " y el momento de inercia respecto a cualquiera de los otros ejes dibujados (ya que sus resultados serán iguales. Es decir, para el cilindro eligiendo la terna de ejes dibujada será $I_{xx} = I_{yy}$

Para realizar ambos cálculos partimos de los resultados de los dos cálculos que **ya hicimos** al analizar los momentos de inercia en un disco.

Es decir: para hallar partimos del momento de inercia de un disco respecto a un eje perpendicular al mismo que pasa por su baricentro; y para hallar indistintamente I_{xx}

ò I_{yy} partimos del momento de inercia de un disco respecto de un eje que es cualquiera de sus diámetros. O sea, un eje cualquiera contenido en el plano del disco que pasa por su baricentro paralelo a su base.

Hallemos primero : I_{zz}

Como pasamos de una figura plana a un sólido; ocurre que nuestro disco tendrá espesor y en el diferencial de masa; ahora colocaremos diferencial de volumen en lugar de diferencial de área.

Esto es $dm = \rho * 2\pi x * d * x * dz$, que representa la misma corona circular que dibujamos en el caso del disco, pero ahora con un espesor “dz”.

Si volvemos a las definiciones generales iniciales y partimos del momento de inercia de ese dm (corona circular con mínimo espesor) respecto al eje Z; hallaremos en una primera integración, el momento del disco con muy pequeño espesor y sumando el momento de las infinitas coronas con espesor infinitésimo que conforma el volumen a lo largo del eje Z, tendremos el momento de inercia buscado. Esto lo expresamos a través del símbolo genérico de integral de volumen:

$I_{zz} = \iiint dm * x^2 = \iiint \rho * 2\pi x * d * x * dz * x^2$ que desdoblamos en dos integrales

$$I_{zz} = \int_0^R \rho * 2\pi x * x^2 dx * \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \quad \text{ambas de resolución directa}$$

$$I_{zz} = 2 * \pi * \rho * \frac{R^4}{4} * h = \rho * \pi * \frac{R^2}{2} * h * R^2 =$$

$$I_{zz} = \rho * Vol * R^2 = \frac{M * R^2}{2}$$

$$I_{zz} = \frac{M * R^2}{2}$$

Es de notar que el momento principal de inercia del cilindro respecto a su eje longitudinal central; tiene la misma expresión que el momento de un disco sin espesor respecto al eje perpendicular a su plano que pasa por su baricentro.

Nota: si el disco y el cilindro tienen el mismo radio y están hechos con el mismo material, la diferencia en el valor de estará en el valor de la masa de ambos, ya que en un caso la densidad es superficial y en el otro la densidad es volumétrica. Queremos significar que un disco no es igual a un cilindro, sino que, para el momento de inercia respecto de su eje central perpendicular al plano de su sección circular, tienen literalmente la misma expresión.

Nos faltan calcular los otros dos momentos de inercia principales que a su vez son iguales; ya que tanto en X como en Y son dos de las diámetros de la sección circular que tiene nuestro cilindro, y como dijimos; el cálculo vale para cualquier diámetro contenido en dicha sección.

Para ello retomamos lo visto para el momento de inercia del disco respecto de un eje que sea diámetro contenido en su superficie. Además para el análisis tomemos un disco cualquiera de espesor infinitésimo a una distancia Z del origen de coordenadas (ubicado según el dibujo en el centro de masa del cilindro).

De acuerdo con lo ya analizado para el disco ubicado justo en el centro de coordenadas tenemos:

$$dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{dm * R^2}{4} = \frac{\rho * dVol * R^2}{4}$$

Pero ahora para el mismo disco, pero ubicado a una distancia Z del origen de coordenadas, debemos aplicar Steiner y entonces la condición genérica será:

$$dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{dm * R^2}{4} + dm * z^2 = \frac{\rho * dVol * R^2}{4} + \rho * dVol * z^2$$

Sacamos ahora factor común

$dI_{xx} = dI_{yy} = \rho * dVol \left[\frac{R^2}{4} + z^2 \right]$ y haciendo reemplazos de la densidad y del diferencial de volumen por sus equivalentes tenemos

$$dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{M}{Vol} * dVol \left[\frac{R^2}{4} + z^2 \right]$$

$$dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{M}{\pi * R^2 * h} * \pi * R^2 * dz * \left[\frac{R^2}{4} + z^2 \right]$$

$$dI_{xx} = dI_{yy} = \frac{M}{h} * \left[\frac{R^2}{4} dz + z^2 dz \right]$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M}{h} * \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{R^2}{4} dz + z^2 dz \right]$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M * R^2}{4h} * h + \frac{M}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

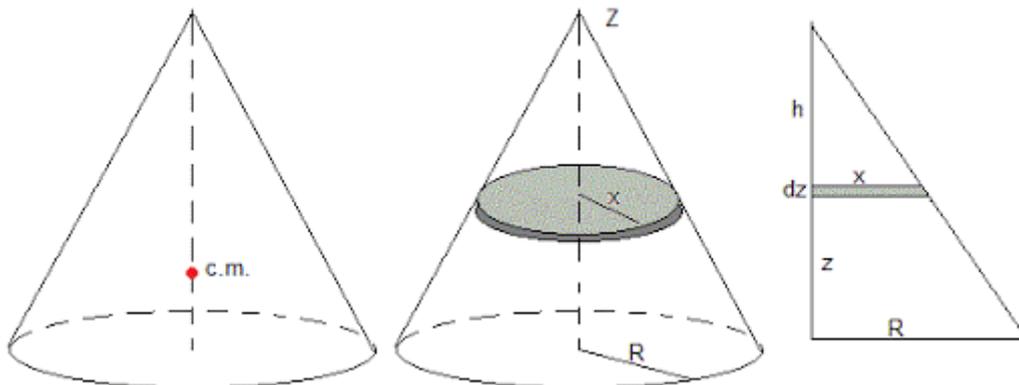
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M * R^2}{4} + \frac{M}{3h} * 2 * \frac{h^3}{8}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M * R^2}{4} + \frac{M}{12} * h^2$$

Con lo cual nuestro tensor principal de inercia para el cilindro tendrá la forma:

$$I = \begin{bmatrix} \left(\frac{M * R^2}{4} + \frac{M}{12} * h^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{M * R^2}{4} + \frac{M}{12} * h^2 \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{M * R^2}{2} \right) \end{bmatrix}$$

2-4 Momentos principales de inercia de un cono. Tensor principal de inercia de un cono.



Aclaración nº1

Antes de comenzar el cálculo de los momentos de inercia vamos a demostrar en qué punto del eje central Z; se encuentra el centro de masa del cono. Lo hacemos para simplificar luego los cálculos que venimos haciendo, ya que en el caso anterior del cilindro, era obvio por su simetría general, que el CM estaba en la mitad de su altura “h”.

En Física I se estudian las ubicaciones del centro de masa para un conjunto discreto de partículas y también se menciona que para un sólido, tomando un eje de referencia, la distancia del CM a ese eje es el cociente entre la sumatoria de los infinitos momentos de primer orden (masa por distancia) que tiene el sólido respecto a ese eje y la masa total del mismo. Simbólicamente: para el caso anterior.

$$Z_{CM} = \frac{\int dm * z}{M}$$

donde M es la masa total del sólido

En el caso de nuestro cono, cada una de esas diferenciales de masa, serán discos de espesor infinitésimo y se ubicarán sucesivamente apilados sobre el eje Z, desde la base a la cúspide del cono. Pero, tenemos que tener en cuenta que a diferencia del cilindro, esos discos o rodajas presentan un radio variable desde “R” en su base, hasta “cero” en la cúspide.

Entonces, para una rodaja intermedia cualquiera de radio “r” para el numerador de la fracción anterior decimos:

$$Z_{CM} = \frac{\int \rho * dVol * z}{M}$$

donde(como antes en el cilindro); ρ = densidad del material del cono.

Tambièn escribimos como en el caso anterior:

$$Z_{CM} = \frac{\int \rho * dVol * z}{M} = \frac{\int \rho * \pi * r^2 * dz * z}{M}$$

ahora bien como “r” es variable podemos hacer uso de la relación que surge del dibujo del cono de triángulos semejantes donde mantenemos la siguiente proporción:

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H - z}$$

ahora si reemplazamos en la integral el valor de “r” sacando previamente constantes fuera de la integral

$$Z_{CM} = \frac{\int \rho * \pi * r^2 * dz * z}{M} = \frac{\rho * \pi * R^2}{M * H^2} * \int_0^H (H - z)^2 * z dz$$

operamos dentro del símbolo integral desarrollando el binomio y multiplicándolo por Z y tenemos:

$$Z_{CM} = \frac{\rho * \pi * R^2}{M * H^2} * \int_0^H (H^2 - 2 * H * z + z^2) * z dz =$$

$$Z_{CM} = \frac{\rho * \pi * R^2}{M * H^2} * \int_0^H (z * H^2 - 2 * H * z^2 + z^3) * dz =$$

Ahora integramos ; reemplazamos los límites de la integral y operando. nos queda:

$$Z_{CM} = \frac{\rho * \pi * R^2}{M * H^2} * \left(\frac{H^4}{2} - \frac{2}{3} * H^4 + \frac{H^4}{4} \right) =$$

$$Z_{CM} = \frac{\rho * \pi * R^2}{M * H^2} * \left[\frac{6 - 8 + 3}{12} \right] * H^4 = \frac{1}{12} * \frac{\rho * \pi * R^2 * H^2}{M}$$

Reemplazamos por conveniencia a 12 por 4*3

$$Z_{CM} = \frac{1}{3 * 4} * \frac{\rho * \pi * R^2 * H^2}{M} \text{ pero sabemos que el volumen de un cono vale}$$

$$Vol \text{ cono} = \frac{\pi * R^2 * H}{3}$$

$$Z_{CM} = \frac{\rho * Vol * H}{4 * M} = \frac{M * H}{4 * M} \text{ y finalmente}$$

$$Z_{CM} = \frac{H}{4}$$

Es lo que buscábamos .El CMasa de un cono està a una distancia de su base igual a un cuarto de su altura .Lo usaremos ahora

Ahora estamos en condiciones de hallar los momentos principales de inercia del cono.

Aclaraciòn N°2:

Inicialmente vamos a colocar la terna de referencia X; Y; Z sobre el vértice del cono por el siguiente motivo:

La generatriz del cono es una recta con una determinada pendiente que depende del radio de su base y de su altura. Si colocamos el origen de coordenadas de la terna en el vértice la recta que representa a la generatriz, tiene ordenada al origen =0. Esto hace más simples las operaciones algebraicas y reduce la posibilidad de errores u omisiones involuntarias.

Luego si deseamos hallar las componentes del tensor de inercia para una terna ubicada en el centro de masas o en cualquier otro punto como la base del cono etc...sólo debemos hacer un cálculo simple aplicando Steiner .Es decir: es posible hacer cálculos ubicando ternas en cualquier punto del eje central del cono, pero colocándolo en su vértice simplifica las operaciones.

En el caso del cilindro, este comentario carece de sentido, porque la generatriz es paralela al eje principal del cilindro y todas las secciones circulares que necesitamos en el cálculo tienen el mismo radio en cualquier punto.

2.4.1 Momento de inercia del cono respecto al eje central perpendicular a su base

Para nuestro dibujo el eje central es el eje Z. Retomamos el concepto del momento de un disco de espesor infinitésimo respecto de un eje perpendicular a su plano.

$$dI_{zz} = \frac{dm * r^2}{2} \text{ Luego partiendo del vértice como dijimos, tenemos}$$

$$I_{zz} = \int_0^H \frac{dm * r^2}{2}$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2} \int_0^H \rho * dVol * r^2 = \frac{\rho * \pi}{2} \int_0^H r^2 * r^2 * dz$$

Pero como vimos nuestra "r" es variable y para la referencia sobre el vértice se forman dos triángulos semejantes donde vale la relación de proporcionalidad:

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H}$$

O sea $r = z * \frac{R}{H}$ luego

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \frac{R^4}{H^4} \int_0^H z^4 * dz$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \frac{R^4}{H^4} * \frac{H^5}{5}$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{10} * R^4 * H = \frac{3}{3} * \frac{\rho * \pi}{10} * R^2 * R^2 * H$$

Pero sabemos que el volumen de un cono se expresa como

$$V_{cono} = \frac{1}{3} * \pi * R^2 * H \text{ y la masa del cono } M = \rho * Vol \text{ resulta}$$

$$I_{zz} = \frac{3}{10} M * R^2$$

2.4.2 Momento de inercia del cono respecto a un eje cualquiera que oficie de diámetro de la sección circular, pero perteneciente a un plano ubicado en el vértice del cono paralelo al plano de la base del mismo. Cálculo final sobre un eje cualquiera paralelo al anterior pero sobre un plano ubicado en el Centro de Masa (traslado por Steiner)

Si al plano de la base del cono le asignamos la terna X; Y; Z a este plano paralelo a la base pero que está en el vértice le podemos asignar una terna X'Y'Z'. Es más, Z y Z' son exactamente el mismo eje. El momento principal de inercia del cono respecto al eje Z es el que acabamos de calcular.

Ahora calcularemos el momento de inercia para cualquier eje que oficie de diámetro de la sección circular, pero contenido en este plano que está en el vértice.

Podemos elegir calcular indistintamente respecto de X' o Y' ya que son iguales los resultados por la simetría que presenta el círculo. Es decir serán $\hat{I}_{xx} = \hat{I}_{yy}$

Finalmente para hallar el valor de los momentos pero referidos a ternas paralelas que pasen por el centro de masa del cono (lo necesitamos para el tensor principal de inercia del cono), o que pasen por la base, etc... basta con aplicar Steiner. Resulta muy simple como veremos.

Partimos nuevamente del momento de inercia de una rodaja para un eje cualquiera contenido en su plano por ejemplo y' que pasa por el baricentro "g" de esa rodaja de radio "r"

$$d\hat{I}_{yg} = \frac{dm}{4} * r^2$$

Ahora para una rodaja cualquiera ubicada a una distancia "Z" del eje Y' **paralelo** al anterior de la rodaja, pero que pasa por el origen de coordenadas aplicando Steiner tendremos:

$$d\hat{I}_y = \frac{dm}{4} * r^2 + dm * z^2$$

$$d\hat{I}_y = \frac{\rho * Vol}{4} * r^2 + \rho * Vol * z^2$$

$$d\hat{I}_y = \frac{\rho * \pi * r^2 * dz}{4} * r^2 + \rho * \pi * r^2 * dz * z^2$$

$$d\hat{I}_y = \rho * \pi * \left[\frac{r^4}{4} dz + r^2 * dz * z^2 \right]$$

Pero al igual que en el punto anterior debemos reemplazar a "r" que es variable de una rodaja a otra, en función de datos de nuestro cono. Para ello recordamos la misma relación proporcional que observamos de los triángulos semejantes mirando el dibujo de la sección del cono.

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H}$$

donde nuevamente escribimos

$$r = \frac{z * R}{H}$$

Haciendo el reemplazo en la última expresión

$$d\dot{I}_y = \rho * \pi * \left[\frac{r^4}{4} dz + \left(\frac{z * R}{H} \right)^2 * dz * z^2 \right]$$

$$d\dot{I}_y = \rho * \pi * \left[\frac{z^4 * R^4}{4 * H^4} dz + \frac{R^2}{H^2} * z^4 * dz \right]$$

$$d\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{z^4 * R^2}{4 * H^2} dz + z^4 * dz \right]$$

$$d\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right] * z^4 * dz$$

Si ahora integro desde la base a la cúspide

$$\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2}{H^2} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right] * \int_0^H z^4 * dz$$

Realizada la integral y reemplazando sus límites

$$\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2 * H^5}{5 * H^2} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right]$$

$$\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2 * H^3}{5} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right]$$

$$\dot{I}_y = \rho * \pi * \frac{R^2 * H^2 * H}{5} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right]$$

Ahora multiplico numerador y denominador por 3

$$\dot{I}_y = \frac{3}{3} * \rho * \pi * \frac{R^2 * H^2 * H}{5} \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right]$$

Pero el volumen de un cono es

$V_{cono} = \frac{1}{3} \pi * R^2 * H$ y su vez lo multiplicamos por la densidad ρ tendremos la masa M del cono

$$\dot{I}_y = \frac{3}{5} * M * H^2 \left[\frac{R^2}{4 * H^2} + 1 \right]$$

$$\dot{I}_y = \frac{3}{5} * M \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right]$$

Este es el momento de inercia del cono para un eje \acute{Y} ó \acute{X} que pasan por la cúspide y son paralelos a la base del cono

Pero necesitamos el momento de inercia para esos ejes X e Y pero que pasen por el centro de masa del cono que sabemos que está a :

$\frac{3}{4}H$ del vértice. Para ello aplicamos Steiner (en forma inversa porque partimos del vértice al CMasa)

$$I_{y_{CM}} = I_{x_{CM}} = \frac{3}{5} * M \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right] - M * \left(\frac{3}{4} H \right)^2$$

$$I_{y_{CM}} = I_{x_{CM}} = \frac{3}{20} * M * R^2 + \frac{3}{5} M * H^2 - \frac{9}{16} * M * H^2$$

$$I_{y_{CM}} = I_{x_{CM}} = \frac{3}{20} * M * R^2 + \frac{(48 - 45)}{80} M * H^2$$

$$I_{y_{CM}} = I_{x_{CM}} = \frac{3}{20} * M \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right)$$

que son los momentos principales de inercia del cono para los ejes X e Y que pasan por su centro de masa y por ende los dos momentos principales de inercia que nos faltaban para completar el tensor principal de inercia del cono

$$I_{yy} = I_{xx} = \frac{3}{20} * M \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right)$$

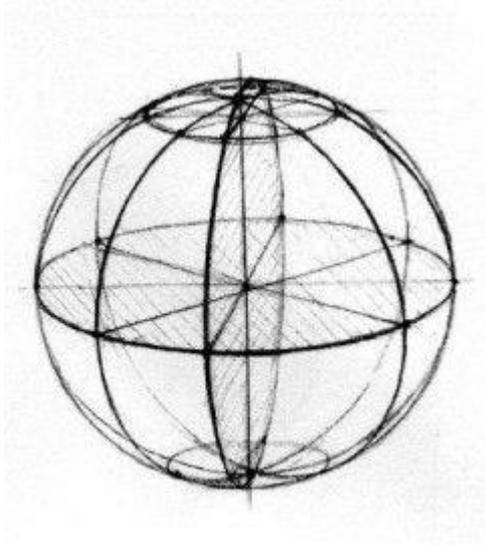
Recordemos que I_{zz} ya lo teníamos del punto anterior con lo cual nuestro tensor principal de Inercia para el cono queda:

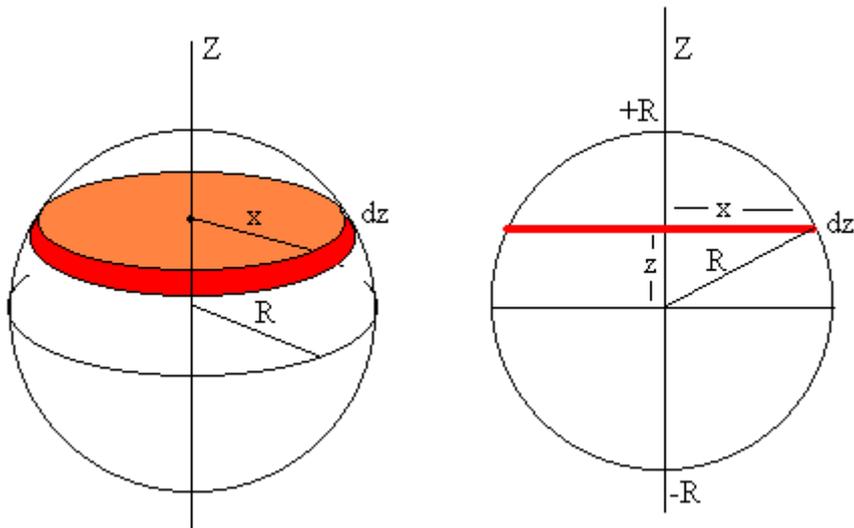
$$I = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{20} * M \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right) \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{20} * M \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right) \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{10} MR^2 \right) \end{bmatrix}$$

2.5 Momento de inercia de una esfera respecto a un eje cualquiera que oficie de diámetro de la sección circular. Tensor principal de inercia de la esfera.

Utilizamos esquemas enteramente análogos a los del cilindro y del cono. Pero obviamente por razones geométricas de simetría para todos sus ejes que pasen por su centro de masa los momentos principales de inercia serán iguales respecto de los tres ejes X; Y; Z de la terna ubicada en su centro de masa.

Veamos los siguientes dibujos





Tomamos en este caso el eje Z

El momento de inercia para un disco genérico respecto al eje Z es como vimos:

$$dI_{zz} = \frac{dm * x^2}{2}$$

nuevamente reemplazamos el dm considerando la densidad del material

$$dI_{zz} = \frac{\rho * dVol * x^2}{2}$$

$$dI_{zz} = \frac{\rho * \pi * x^2 dz * x^2}{2}$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \int_{-R}^{+R} x^4 dz$$

Para resolver esta integral que a priori nos presenta dos variables tengamos en cuenta mirando el dibujo que:

$$x^2 + z^2 = R^2$$

$$x^2 = R^2 - z^2$$

$$x^4 = (R^2 - z^2)^2$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \int_{-R}^{+R} (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \int_{-R}^{+R} (R^4 - 2R^2z^2 + z^4) dz$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \left[(R^4 * (R - (-R))) - \frac{2R^2}{3} * (R^3 + R^3) + \frac{2 * R^5}{5} \right]$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \left[(2R^5) - \frac{4R^5}{3} + \frac{2R^5}{5} \right]$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \left[\frac{30 - 20 + 6}{15} \right] * R^5$$

$$I_{zz} = \frac{\rho * \pi}{2} * \left[\frac{16}{15} \right] * R^2 * R^3$$

Pero $Vol_{esf} = \frac{4}{3} * \pi * R^3$ y multiplicando por la densidad tendremos la masa "M" de la esfera. Luego podemos reemplazar

$$I_{zz} = \frac{M}{2} * \left[\frac{4}{5} \right] * R^2$$

$$I_{zz} = \frac{2 * M}{5} * R^2$$

Y por la simetría total de la esfera resulta

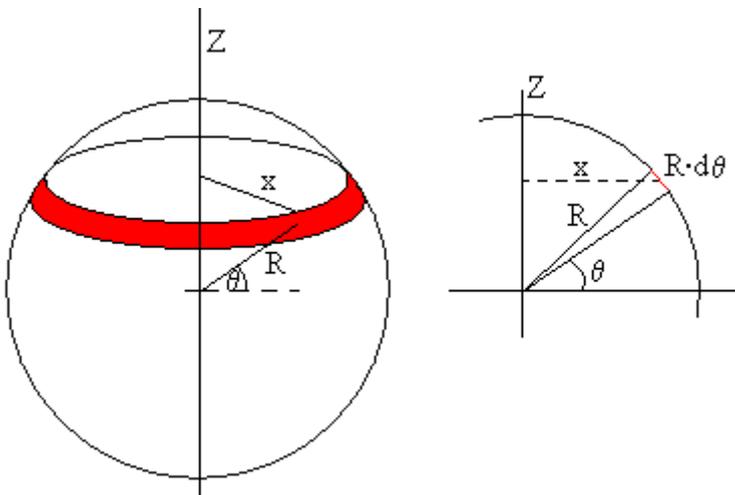
$$I_{zz} = I_{xx} = I_{yy} = \frac{2 * M}{5} * R^2$$

Resulta entonces que el tensor principal de inercia de la esfera es:

$$I = \begin{bmatrix} \left(\frac{2 * M}{5} * R^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2 * M}{5} * R^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2 * M}{5} * R^2\right) \end{bmatrix}$$

2.6 Momentos principales de inercia de una esfera hueca .Tensor principal de inercia de la esfera hueca.

Hacemos el dibujo auxiliar



Tomamos como elemento de área la franja rectangular de longitud $2 * \pi * x$ y ancho: $R d\theta$

Entonces:

Nota: acá usaremos diferencial de superficie en lugar de diferencial de volumen habida cuenta que estamos analizando una cáscara esférica de espesor despreciable.

$$I_{ZZ} = \int dm * x^2$$

$$I_{ZZ} = \int \rho * dSup * x^2 = \rho \int 2 * \pi * x * R * d\theta * x^2 = \rho * 2 * \pi * R * \int x^3 * d\theta$$

Pero $\cos\theta = \frac{x}{R}$ entonces hacemos cambio de variable en la integral y fijamos sus límites

$$I_{ZZ} = \rho * 2 * \pi * R * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R^3 * (\cos\theta)^3 d\theta$$

$$I_{ZZ} = \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^3 d\theta$$

$$I_{ZZ} = \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2 * \cos\theta d\theta$$

$$I_{ZZ} = \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin\theta)^2) * \cos\theta d\theta$$

Que desdoblamos en dos integrales

$$I_{ZZ} = \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2 * \cos\theta d\theta \quad (1)$$

La primera integral es directa e igual a $\sin\theta$ que al reemplazar por los límites de ella da =2

$$I_{ZZ} = \rho * 4 * \pi * R^4 - \rho * 2 * \pi * R^4 * \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2 * \cos\theta d\theta \quad (2)$$

Para resolver la segunda integral tenemos que recordar la integración por partes donde se hace cambio de variables y sustitución de la siguiente forma. Nota

momentáneamente para resolverla no consideramos las constantes que están fuera de ella ni sus límites de integración que consideraremos al final

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^2 * \cos\theta d\theta = u * v - \int v * du \quad (3)$$

Ahora sustituimos

$$u = (\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$du = 2 * \operatorname{sen}\theta * \cos\theta * d\theta$$

$$dv = \cos\theta * d\theta$$

Por lo tanto $v = \operatorname{sen}\theta$

Ahora reemplazamos en la (2)

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^2 * \cos\theta d\theta = (\operatorname{sen}\theta)^2 * \operatorname{sen}\theta - \int \operatorname{sen}\theta * 2 * \operatorname{sen}\theta * \cos\theta * d\theta$$

La integral del segundo miembro es igual al primer miembro. La pasamos entonces al primer miembro y nos queda

$$3 * \int (\operatorname{sen}\theta)^2 * \cos\theta d\theta = (\operatorname{sen}\theta)^2 * \operatorname{sen}\theta$$

Luego

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^2 \cos\theta d\theta = \frac{1}{3} * (\operatorname{sen}\theta)^3$$

Ahora reemplacemos los límites de la integral dentro de la (1)

de donde todo el segundo término de la (1) se reduce a $\frac{1}{3} * (\operatorname{sen}\theta)^3$ que al reemplazar los límites queda

$$\frac{1}{3} * [1^3 - (-1)^3] = \frac{1}{3} * (1 + 1) = \frac{2}{3}$$

Copiemos nuevamente la (2) y reemplacemos los resultados anteriores en la segunda de las integrales que nos faltaba resolver y operemos algebraicamente

$$I_{zz} = \rho * 4 * \pi * R^4 - \rho * 2 * \pi * R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}\theta)^2 * \cos\theta \, d\theta \quad (2)$$

$$I_{zz} = \rho * 4 * \pi * R^4 - \rho * 2 * \pi * R^4 * \frac{2}{3}$$

$$I_{zz} = \rho * \pi * R^4 * \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} * \rho * \pi * R^4$$

$$I_{zz} = \frac{2}{3} * 4\pi * R^2 * \rho * R^2 \text{ pero la superficie de la esfera es } 4\pi * R^2$$

Que multiplicada por ρ da su Masa, luego

$$I_{zz} = \frac{2}{3} * M * R^2$$

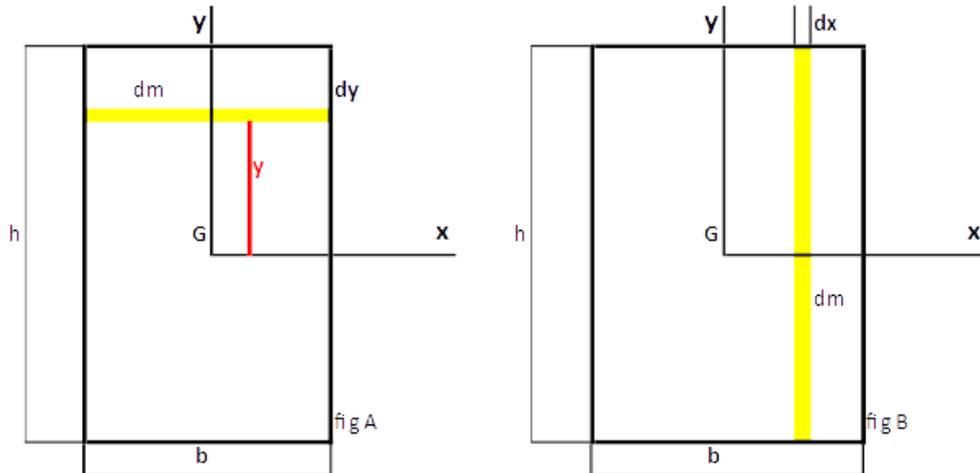
Y por supuesto como $I_{zz} = I_{xx} = I_{yy}$ su tensor principal de inercia será

$$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} * M * R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} * M * R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} * M * R^2 \end{bmatrix}$$

Parte 3: Aplicaciones sencillas en chapas delgadas del tensor de inercia. Ejes principales de inercia Círculo de Mohr.

Antes de pasar al ejemplo práctico vamos a recordar cuanto valen los momentos de inercia en una chapa rectangular para los dos ejes perpendiculares contenidos en su

plano , que pasan por su baricentro y que son respectivamente paralelos a sus lados. Ellos son X e Y.



$$I_{xx} = \int dm * y^2 \quad I_{yy} = \int dm * x^2$$

$$I_{xx} = \int \rho * dSup * y^2 = \rho * \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b * dy * y^2$$

$$I_{xx} = \rho \frac{b}{3} * \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right] = \rho * 2 * \frac{b}{3} * \frac{h^3}{8} = \rho * \frac{b * h^3}{12}$$

$$I_{xx} = \rho \frac{b}{12} * h * h^2 = \rho * \frac{Sup}{12} * h^2 = \frac{M * h^2}{12}$$

$$I_{xx} = \frac{M * h^2}{12}$$

Anàlogamente con la figura de la derecha

$$I_{yy} = \int dm * x^2$$

$$I_{yy} = \int \rho * dSup * x^2 = \rho * \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} h * dx * x^2$$

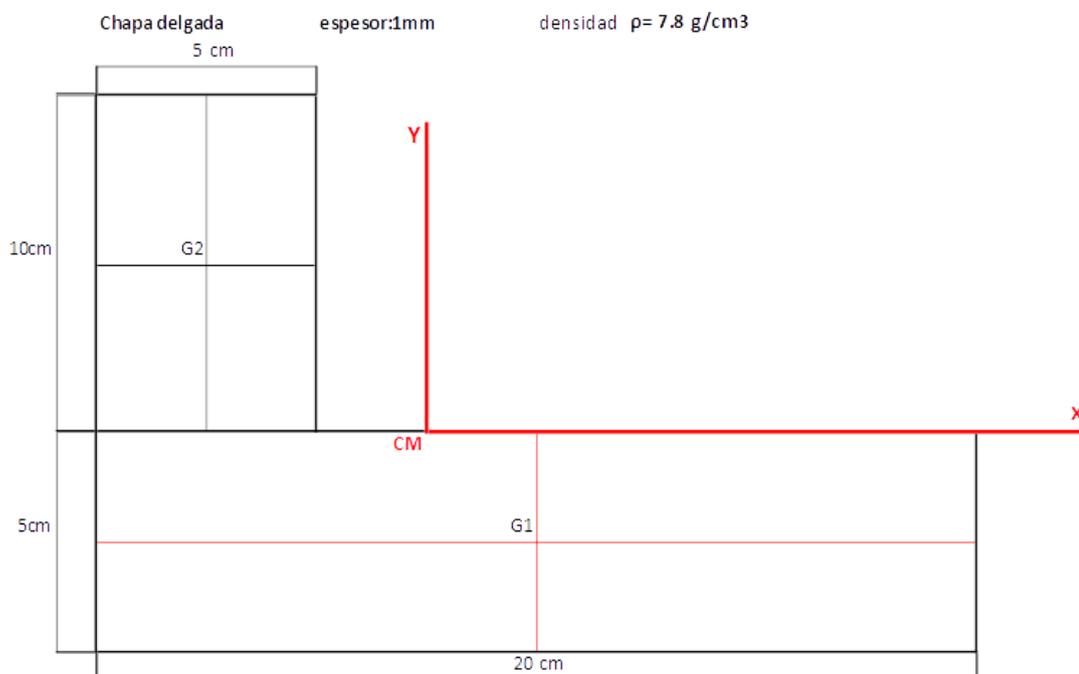
$$I_{yy} = \rho * \frac{h}{3} * \left[\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8} \right) \right] = 2 * \rho * \frac{h}{3} * \frac{b^3}{8}$$

$$I_{yy} = \rho * \frac{h}{12} * b * b^2 = \rho * \frac{Sup * b^2}{12} = \frac{M * b^2}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{M * b^2}{12}$$

Pasemos ahora a analizar una chapa simple que puede encontrarse en cualquier taller

Nota: dibujamos también un par de ejes X; Y que a continuación demostramos que pasan por su centro de masa



Vamos a calcular su centro de masa total a partir de los dos rectángulos que la componen. El rectángulo inferior (horizontal) es y el rectángulo superior (vertical)

$$X_{CM} = \frac{M_1 * XG_1 + M_2 * XG_2}{M_1 + M_2}$$

$$X_{CM} = \frac{\rho * Sup_1 * XG_1 + \rho * Sup_2 * XG_2}{\rho * Sup_1 + \rho * Sup_2}$$

Simplificando la densidad de la chapa y reemplazando la superficie genérica de los rectángulos con los datos del problema, tenemos:

$$X_{CM} = \frac{20*5*10+10*5*2,5}{20*5+10*5} \text{ cm} = 7,5 \text{ cm} \quad \text{desde el margen izquierdo de la}$$

Figura.

Por analogía:

$$Y_{CM} = \frac{\rho * Sup_1 * YG_1 + \rho * Sup_2 * YG_2}{\rho * Sup_1 + \rho * Sup_2}$$

$$Y_{CM} = \frac{20 * 5 * 2,5 + 10 * 5 * 10}{20 * 5 + 10 * 5} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$$

Desde el margen inferior de la figura

Ahora calculamos ambos momentos de inercia de la chapa con respecto al par de ejes coordenados XY es decir la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes baricéntricos de cada rectángulo que luego por Steiner referimos a los ejes que pasan por el Centro de Masa total que tiene la chapa. A los cuales designamos como: I_{xx} e I_{yy} .

Es decir:

$$I_{XX} = I_{xM1} + M_1 * (Y_{CM} - YG_1)^2 + I_{xM2} + M_2 * (Y_{CM} - YG_2)^2$$

Donde:

$$I_{XX} = \rho * Vol_1 * \frac{5^2}{12} + \rho * Vol_1 (5 - 2,5)^2 + \rho * Vol_2 * \frac{h_2^2}{12} + \rho Vol_2 (5 - 10)^2$$

$$I_{XX} = \rho * (20 * 5 * 0,1) * \frac{5^2}{12} + \rho * (20 * 5 * 0,1)(5 - 2,5)^2 + \rho * (5 * 10 * 0,1) \frac{10^2}{12} + \rho(5 * 10 * 0,1)(5 - 10)^2$$

$$I_{XX} = \rho * 10 * \frac{25}{12} + \rho * 10 * 6,25 + \rho * 5 * \frac{100}{12} + \rho * 5 * 25$$

$$I_{XX} = 7,8 * 10 * \frac{25}{12} + 7,8 * 10 * 6,25 + 7,8 * 5 * \frac{100}{12} + 7,8 * 5 * 25$$

$$I_{XX} = 7,8 * 10 * \frac{25}{12} + 7,8 * 10 * 6,25 + 7,8 * 5 * \frac{100}{12} + 7,8 * 5 * 25$$

$$I_{XX} = 7,8(20,83 + 62,5 + 41,66 + 125)g * cm^2$$

$$I_{XX} = 7,8(250)g * cm^2 = 1950 g * cm^2$$

Análogamente

$$I_{YY} = I_{YM1} + M_1 * (X_{CM} - X_{G1})^2 + I_{YM2} + M_2 * (X_{CM} - X_{G2})^2$$

$$I_{YY} = \rho * Vol_1 * \frac{b_1^2}{12} + \rho * Vol_1 * (7,5 - 10)^2 + \rho * Vol_2 * \frac{b_2^2}{12} + \rho * Vol_2 * (7,5 - 2,5)^2$$

$$I_{YY} = \rho * \left[Vol_1 * \frac{b_1^2}{12} + Vol_1 * (7,5 - 10)^2 + Vol_2 * \frac{b_2^2}{12} + Vol_2 * (7,5 - 2,5)^2 \right]$$

$$I_{YY} = \rho * \left[(20 * 5 * 0,1) * \frac{20^2}{12} + (20 * 5 * 0,1) * (-2,5)^2 + (5 * 10 * 0,1) * \frac{5^2}{12} + (5 * 10 * 0,1) * (5)^2 \right]$$

$$I_{YY} = \rho * \left[10 * \frac{400}{12} + 10 * 6,25 + 5 * \frac{25}{12} + 125 \right]$$

$$I_{YY} = 7,8 * [333,33 + 62,5 + 10,42 + 125] = 4143,75 \text{ g} * \text{cm}^2$$

$$I_{YY} = 4143,75 \text{ g} * \text{cm}^2$$

Ahora hay que calcular el momento centrífugo (o momento producto) de la chapa respecto de los ejes XY. Sabemos que es un momento simétrico respecto de la diagonal principal del tensor de inercia (matriz de inercia).

$$I_{xy} = I_{yx} = M_1 * (X1_G - X_G) * (Y1_G - Y_G) + M_2 * (X2_G - X_G) * (Y2_G - Y_G)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \rho * Vol_1 * (X1_G - X_G) * (Y1_G - Y_G) + \rho * Vol_2 * (X2_G - X_G) * (Y2_G - Y_G)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \rho * (20 * 5 * 0,1) * (10 - 7,5) * (2,5 - 5) + \rho * (5 * 10 * 0,1) * (2,5 - 7,5) * (10 - 5)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \rho * (10) * (2,5) * (-2,5) + \rho * (5) * (-5) * (5)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \rho * (-62,5) \text{ cm}^5 - \rho * (125) \text{ cm}^5 = -\rho * 187,5 \text{ cm}^5$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -7,8 * \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} * 187,5 \text{ cm}^5 = -1462,5 \text{ g} * \text{cm}^2$$

El tensor de inercia de nuestra chapa referido a los ejes X Y que pasan por su centro de masa resulta:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1950 & -1462,5 \\ -1462,5 & 4143,5 \end{bmatrix} \text{ g} * \text{cm}^2$$

donde observamos que no es el tensor principal de inercia habida cuenta que los elementos fuera de su diagonal principal no son iguales a cero.

Haciendo abstracción de la unidad, nos quedamos con la matriz de inercia numérica para trabajar más cómodos y tal como hicimos en la primera parte, la vamos a diagonalizar a partir de encontrar los autovalores de la ecuación característica y luego con ellos ubicar los autovectores asociados.

Esto es: con los autovalores (como ya hicimos), logramos los valores de los momentos de inercia principales y con los autovectores las nuevas direcciones ortogonales $X'Y'$, respecto de las cuales los momentos centrífugos (momentos producto) valen cero

En definitiva habremos encontrado el tensor principal de inercia referido a los ejes principales de inercia.

Lo vamos a hacer además como ilustración, por un camino gráfico mediante la utilización del llamado **círculo de Mohr**.

Suele utilizarse como control en los tableros de dibujo de talleres importantes, (como son los de la industria naval o aeronáutica) donde se trabaja con chapas, que luego son sometidas a tensiones que pueden provocar deformaciones o roturas. De allí la necesi-

dad de vigilar esas tensiones mecánicas con relación a las tensiones admisibles. El círculo de Mhor suele usarse para hallar rápidamente estas tensiones (como las mostradas en la figura de la Parte 1 donde se dibuja una partícula del sólido con sus tensiones asociadas de compresión ; tracción o de corte).

Se usa generalmente también para encontrar deformaciones, momentos de inercia y ejes principales de inercia.

Comenzamos como ya vimos analíticamente, escribiendo a partir de la matriz de inercia de nuestra chapa referida a los ejes X;Y del dibujo, la ecuación característica para determinar autovalores.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda * I_2) = 0$$

Es de notar que como nuestra chapa es muy delgada consideramos solo dos dimensiones X; e Y. De allí que en el polinomio, la matriz unidad sea de rango 2 en lugar de 3 y por ende solo hallaremos dos autovalores : (λ_1) y (λ_2)

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1950 & -1462,5 \\ -1462,5 & 4143,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{bmatrix} (1950 - \lambda) & -1462,5 \\ -1462,5 & (4143,75 - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$(1950 - \lambda) * (4143,75 - \lambda) - (-1462,5)^2 = 0$$

$$1950 * 4143,75 - \lambda * 4143,75 - 1950 * \lambda + \lambda^2 + 2138906,25 = 0$$

$$5941406,25 - 6093,75 * \lambda + \lambda^2 = 0$$

Ordenando términos :

$$\lambda^2 - 6093,75 * \lambda + 5941406,25 = 0$$

Cuyas raíces como sabemos valdrán $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2a}$

Operando surgen:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6093,75 \pm \sqrt{6093,75^2 - 23765625}}{2}$$

Operando nuestros autovalores son:

$$\lambda_1 = 4875$$

$$\lambda_2 = 1218,75$$

Con sus unidades son también nuestros momentos principales de inercia respecto de los nuevos ejes de coordenadas **X'** e **Y'** de los cuales nos resta encontrar su dirección.

Tal como hicimos en la primera parte a partir de los autovalores , planteamos ecuaciones a partir de la matriz de inercia inicial referida a los ejes de partida X; e Y:

Para λ_1

λ_1

$$\begin{pmatrix} 1950 & -1462,5 \\ -1462,5 & 4143,75 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4875 * X \\ 4875 * Y \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz por el vector e igualando miembros tenemos dos ecuaciones:

$$1950 * X - 1462,5 * Y = 4875 * X \quad (1)$$

$$-1462,5 * X + 4143,75 * Y = 4875 * Y \quad (2)$$

De la (1) tenemos:

$$-1462,5 * Y = 2925 * X$$

$$Y = \frac{-2925 * X}{1462,5} = -2 * X$$

$$Y = -2X$$

Obviamente es la ecuación de una recta .Aquí podemos considerar su dirección con el vector unitario (el más pequeño que conserve esa dirección de la recta) que como sabemos del álgebra se llama autovector .É l será: $(\mathbf{1i} - \mathbf{2j})$

Por otro lado si tomamos la igualdad 2 tenemos :

$$-1462,5X=4875Y -4143,75Y$$

$$-1462,5X=731,25 Y$$

que también arriba a $Y= -2X$ y en consecuencia al mismo autovector

2º) Para $\lambda_2 = 1218,75$ seguimos los mismos pasos

$$\begin{bmatrix} 1950 & -1462,5 \\ -1462,5 & 4143,75 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1218.75X \\ 1218.75Y \end{bmatrix} \quad \text{luego}$$

$$1950 * X - 1462,5 * Y = 1218,75 * X \quad (1)$$

$$-1462,5 * X + 4143,75 * Y = 1218,75 * Y \quad (2)$$

De la (1)

$$1950 \cdot X - 1218,75 \cdot Y = 1462,5Y \quad \text{o también } 731,25 \cdot X = 1462,5 \cdot Y$$

$X = -2 \cdot Y$ que da origen al autovector $(1i; 0,5j)$ o bien su múltiplo para trabajar con números enteros pero en la misma dirección

$(2i; 1j)$

Si ahora como antes trabajamos con la igualdad (2) arribamos a :

$$-1462,5 \cdot X = 1218,75 \cdot Y - 4143,75 \cdot Y$$

$$-1462,5 \cdot X = -2925 \cdot Y$$

$X = 2 \cdot Y$ que da origen al mismo autovector anterior $(1i + 0,5j)$ o lo que es lo mismo usando un mismo múltiplo en cada componente para trabajar con números enteros, pero siempre en la misma dirección

$(2i; 1j)$

Si ahora como antes trabajamos con la igualdad (2) arribamos a:

$$-1462,5 \cdot X = 1218,75 \cdot Y - 4143,75 \cdot Y$$

$$-1462,5 \cdot X = -2975 \cdot Y$$

$X = 2 \cdot Y$ que da origen al mismo autovector anterior $(1i; 0,5j)$ o lo que es lo mismo

$(2i; 1j)$

Verificación :

Hacemos la comprobación de que los dos autovectores hallados son perpendiculares entre sí. Para ello recordamos del álgebra que dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando partiendo de sus pendientes, m_1 ; y m_2 se cumple que:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{(1) veamos en este caso}$$

Autovector (1) $(1 \cdot i - 2 \cdot j)$ cuya pendiente es $m_1 = \frac{-2}{1}$

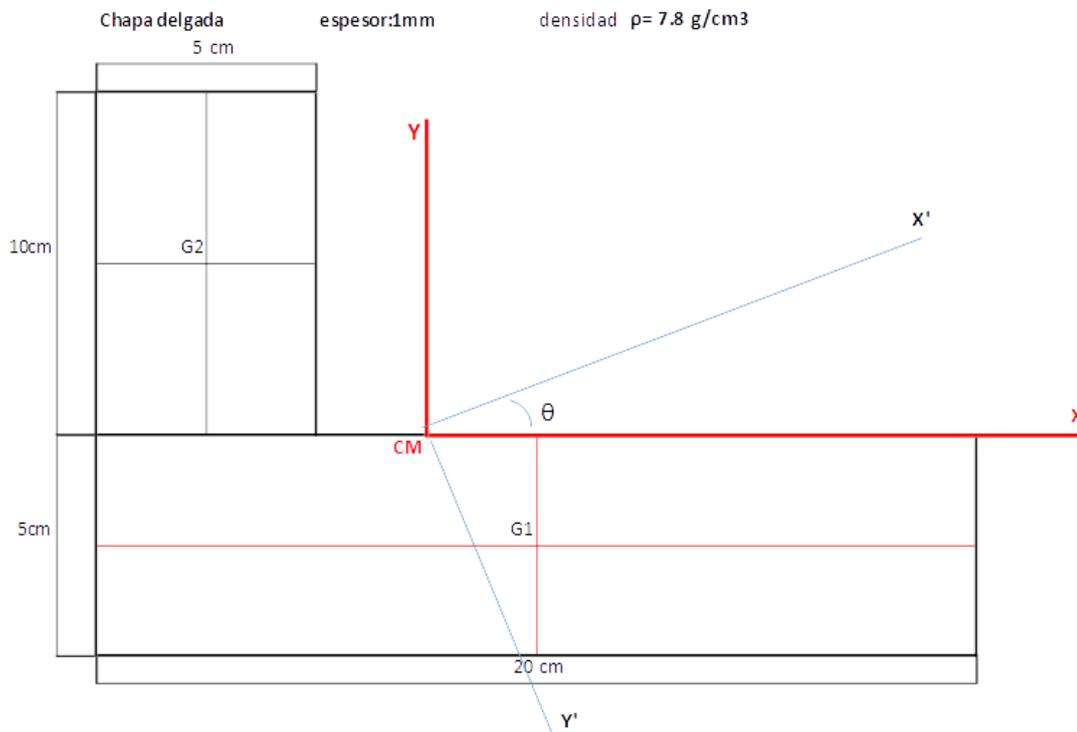
Autovector (2) $(1 * i; 0,5 * j)$ cuya pendiente es $m_2 = \frac{0,5}{1}$

Ahora verifiquemos la condición (1)

$$\frac{-2}{1} = -\frac{1}{0,5} \quad \text{Esto es } -2 = -2 \text{ que verifica la condición}$$

Los dos autovectores hallados conforman las direcciones ortogonales de los ejes principales de inercia buscados X' e Y' para los cuales la matriz de inercia (sin unidades) o el tensor de inercia (con unidades) tienen forma de matriz diagonal, o sea que para los nuevos ejes X' ; e Y' las componentes del tensor de inercia son solamente los momentos principales de inercia sobre la diagonal principal (son los autovalores) y fuera de ella las componentes centrífugas (o componentes producto) valen cero.

Si volvemos al dibujo de la chapa con sus ejes ortogonales iniciales $(X;Y)$ con origen en su centro de masa; observamos que los nuevos ejes principales X' ; e Y' han rotado respectivamente un ángulo θ respecto de X e Y ; pero mantienen la ortogonalidad.



El valor de la rotación θ lo hallamos a partir de $\operatorname{tg}\theta = \frac{0,5}{1} = 0,5$

De donde $\operatorname{arc\,tg}\,0,5 = \theta = 26,5^\circ$

Pasamos ahora como corolario práctico a trazar el mencionado círculo de Mohr, aplicado a este tema de los momentos de inercia.

Ante todo es importante aclarar que por construcción cualquier ángulo considerado sobre el círculo de Mohr es el doble del

ángulo a dibujar luego sobre los ejes cartesianos. Lo vemos seguidamente.

La construcción gráfica sigue los siguientes pasos:

1° Se trazan dos ejes perpendiculares. Sobre el horizontal en una escala elegida marcamos los valores de momentos de inercia, calculados para el tensor (matriz de inercia) inicial referida a los ejes X, e Y que están ubicados sobre su diagonal principal.

Dichos valores sabemos que son (sin tomar las unidades)

$$I_{xx} = 1950$$

$$I_{yy} = 4143,75$$

Sobre el eje vertical se dibujarán los valores calculados para la misma matriz anterior que están fuera de su diagonal principal que como sabemos son .

$$I_{xy} = I_{yx} = -1462,5$$

Estas componentes se dibujarán en forma vertical en la misma escala de los valores anteriores del eje horizontal y a partir de cada uno de los extremos de los valores ya dibujados de I_{xx} e I_{yy} .

Segunda aclaración: en el trazado de Mohr los valores verticales se dibujan uno sobre el eje horizontal y otro por debajo .Eso es debido a que en la matriz un valor está a la derecha de la diagonal principal y otro a la izquierda como vemos:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

2º Se unen los extremos de los dos segmentos verticales recientemente dibujados y el valor de ese nuevo segmento **es el diámetro del círculo de Mohr** que obviamente corta a la horizontal en un punto que es el **centro del círculo de Mohr** .Dicho todo esto lo dibujamos y comenzamos el análisis:

Nota: en el Taller dibujados en escala los valores originales de I_{xx} ; I_{yy} ; I_{xy} e I_{yx} , se encuentra el centro del círculo y se lo traza con un compás. Los valores principales se miden con una regla milimetrada. Aquí trazamos el círculo usando la planilla Excel con sus funciones para poder intercalar valores intermedios en un análisis mas detallado sin necesidad de medir continuamente en escala con una regla.

El diámetro original mostrado en la figura de más abajo es la línea oblicua que surge del punto anterior 2º que luego con el compás la vamos girando lentamente completando la circunferencia .

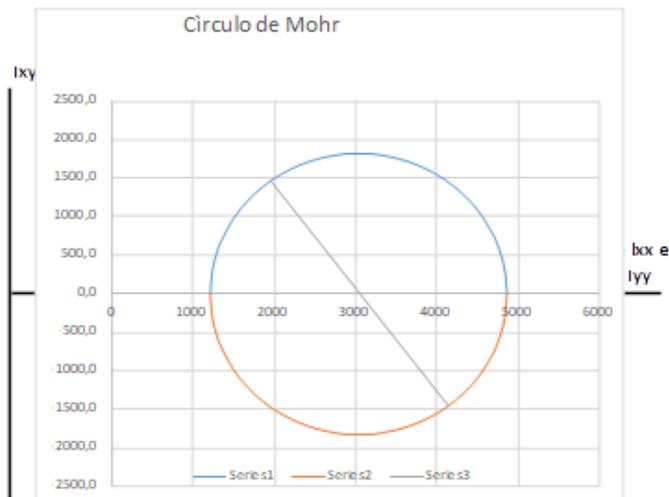
El mismo círculo desplazado del origen en un valor C sobre el eje X, lo hallamos en excel recordando la ecuación cartesiana de la circunferencia

$$(X - C)^2 + Y^2 = R^2$$

El segmento original que representa el diámetro del círculo de Mohr, lo hallamos en Excel con la ecuación de la recta $Y = mx + b$ donde en este caso a partir de los datos que tenemos sobre los ejes X e Y , surge una recta de pendiente “ m ” negativa y una ordenada al origen “ b ” positiva. De esa recta sobre la figura indicamos solo el segmento correspondiente al diámetro del círculo de allí que su columna en Excel tenga valores en blanco.

Acotación: la tabla Excel y su gráfico asociado aparecen juntas en la página siguiente .

	radio al cuadrado	Centro del círculo					
	R^2	c	$(X-C)^2$	Eje horiz	Eje vertic	(-Eje vertic)	
mínimo de I_{xx} y de I_{xy}	3341,584	3047	3341,584	1219	0,0	0,0	momento ppal inercia I'_{xx}
	3341,584	3047	3337,929	1220	60,5	-60,5	
	3341,584	3047	3229,209	1250	335,2	-335,2	
	3341,584	3047	3052,009	1300	538,1	-538,1	
	3341,584	3047	2879,809	1350	679,5	-679,5	
	3341,584	3047	2393,209	1500	973,8	-973,8	
	3341,584	3047	1951,609	1650	1179,0	-1179,0	
	3341,584	3047	1353,009	1800	1336,6	-1336,6	
inicial de I_{xx} y de I_{xy}	3341,584	3047	1203,409	1950	1462,2	1462,2	1468,2
	3341,584	3047	1096,209	2000	1498,5	-1498,5	1401,7
	3341,584	3047	8046,09	2150	1592,8	-1592,8	1202,2
	3341,584	3047	5380,09	2300	1668,4	-1668,4	1002,7
	3341,584	3047	3584,09	2450	1727,8	-1727,8	803,2
	3341,584	3047	1998,09	2600	1772,5	-1772,5	603,7
	3341,584	3047	8820,9	2750	1803,7	-1803,7	404,2
	3341,584	3047	2160,9	2900	1822,1	-1822,1	204,7
máx valor de I_{xx} y de I_{xy}	3341,584	3047	0	3047	1828,0	1828,0	9,1
mín valor de I_{yy} y máx de I_{xy}	3341,584	3047	2340,9	3200	1821,6	1821,6	-194,4
	3341,584	3047	9180,9	3350	1802,7	-1802,7	-393,9
	3341,584	3047	2052,09	3500	1771,0	-1771,0	-593,4
	3341,584	3047	3636,09	3650	1725,7	-1725,7	-792,9
	3341,584	3047	5670,09	3800	1665,7	-1665,7	-992,4
	3341,584	3047	8134,09	3950	1589,4	-1589,4	-1191,9
	3341,584	3047	1108,809	4100	1494,2	-1494,2	-1391,4
inicial de I_{yy} y de I_{xy}	3341,584	3047	1202,860,56	4143,75	1462,4	1462,4	-1449,5
	3341,584	3047	1447,209	4250	1376,4	-1376,4	
	3341,584	3047	1830,609	4400	1229,2	-1229,2	
	3341,584	3047	2259,009	4550	1040,5	-1040,5	
	3341,584	3047	2732,409	4700	780,5	-780,5	
	3341,584	3047	2900,209	4750	664,4	-664,4	
	3341,584	3047	3073,009	4800	518,2	-518,2	
	3341,584	3047	3250,809	4850	301,3	-301,3	
máximo valor de I_{yy}	3341,584	3047	3341,584	4875	0,0	0,0	momento ppal inercia I'_{yy}
mín valor de I_{xy}							



(-I_{xy}) entre el segmento diagonal y el eje horizontal queda el doble del ángulo entre los ejes originales X;Y y los ppales inercia X'Y'

Si Partimos (por ej) del eje horizontal a la izquierda tendremos I_{xx} **mínimo** = (1218,75 e $I_{xy}=0$

Luego seguimos girando y nos encontramos en el ángulo (2θ) con los valores iniciales de $I_{xx} = 1950$ e $I_{xy} = 1462,5$

Seguimos girando y a 90° encontramos a I_{xy} **máximo** (el valor de R del círculo) y en 180° ya sobre la horizontal, con el valor en escala de I_{yy} **máximo** = (4875 e $I_{yx} = 0$ ya que el inicial de I_{yy} con el que iniciamos el dibujo era 4143.75 con su asociado

$$I_{yx} = -1462.5.$$

Es importante recalcar que el primer valor mencionado I_{xx} **mínimo** y el último I_{yy} **máximo en el diagrama de Mohr**, están a 180° pero son valores pertenecientes a los ejes coordenados principales de inercia X' e Y' que obviamente están a 90° (son ortogonales).

Algo similar ocurre entre los valores máximos y mínimos de los momentos centrífugos (momentos producto) que en el círculo de Mohr vemos que están a 90° , cuando sobre los ejes cartesianos están a 45° .

Si bien no es tema de este análisis, cuando se usa el círculo de Mohr para el estudio de tensiones normales y tangenciales, ocurre lo mismo. Los máximos de las tensiones tangenciales aparecen en él, a 90° de los máximos de las tensiones normales, cuando en realidad sobre el diagrama con ejes cartesianos están a 45° como se demuestra en los cursos de Estabilidad o Resistencia de los Materiales.

Finalmente entre los ejes iniciales X ; Y de referencia en nuestra chapa que pasan por su centro de masa y los ejes principales de inercia X' e Y' hallados a partir de los autovectores, como vimos existe un ángulo θ en lugar de 2θ como se mide en el diagrama de Mohr.

Todo esto corrobora lo mencionado al comenzar este punto respecto de los ángulos medidos gráficamente sobre el círculo de Mohr. O sea nosotros calculamos al finalizar el tema autovalores y autovectores un ángulo θ de $26,5^\circ$ y aquí medimos del diagrama entre el segmento inclinado que muestra el diámetro de partida y el eje horizontal de referencia

$$\text{tang } \alpha = \frac{I_{yx}}{(C - I_{xx})} = \frac{1462,5}{(3047 - 1950)} = 1.33.$$

Luego $\arctan 1.33 = \alpha = 53^\circ$ que es el doble de ángulo real $26,5^\circ$ que debemos rotar los ejes de referencia iniciales X e Y para ubicar los ejes principales de inercia X' e Y'

Agustin Zabaljauregui